Wirtschaftswissenschaftlies Zentrum
der
Universität Basel

"Capital Markets & Risk Management" (8611)

Dozenten:
Prof. Dr. Heinz Zimmermann
Dr. Patrick Wegmann

Wintersemester 2002/2003

Inhalt

1. Einführung und Value-at-Risk

1.1 Grundlagen

Das Marktrisiko ist die Quantifizierung des Verlustrisikos durch Finanzmarktvariable. Solche Finanzmarktvariablen umfassen Zinsen (Interest Rates, IR), Fremdwährungen (Foreign Exchange, FX), Aktien (Equity, EQ), Commoditiees (Rohstoffe) sowie verschiedene Aggregationsstufen (z.B. Indizes, Derviate etc).

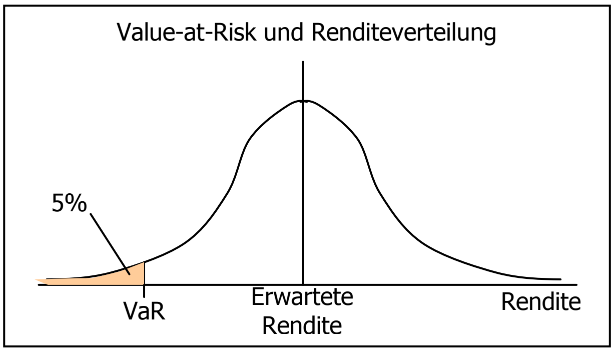
Die moderne Risikoanalyse ist eine relativ junge Disziplin. Die klassische Risikoanalyse bezog sich auf Nominalwerte und stützte sich auf Sensitivitätsmasse und Szenarioanalysen. Sie sagte jedoch nur etwas über den heutigen Wert etwa eines Portfolios aus, nichts über den zukünftigen Wert, also nichts über den Risikogehalt.

Die wichtigsten Nachteile der klassischen Risikoanalyse tabellarisch dargestellt:

- sehr grob
- nur linear
- keine Berücksichtigung von Eintretenswahrscheinlichkeiten
- keine Berücksichtigung von Diversifikationseffekten

Um diesen Mängeln gerecht zu werden, entwickelte Till Guldimann den Value-at-Risk Ansatz. Der Value-at-Risk (VaR) gibt an, welcher Verlust innerhalb einer gegebenen Periode mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird.

Bsp.: VaR 1d, 99% = CHF 3'000'000 bedeutet, dass innerhalb 1 Tag der Verlust mit 99% Sicherheit den Wert CHF 3'000'000 nicht überschreitet. Im Erwartungsfall verliert die Position allerdings mindestens CHF 3'000'000 in 1 von 100 Tagen.



Der VaR kann sowohl in Renditen als auch in absoluten Geldbeträgen angegeben werden. Der VaR basiert auf der Finanzmarkttheorie (Pricing, Sensitivitäten) und der Statistik (Verhalten der Risikofaktoren, Verteilungen). Der VaR Ansatz ist ein konsistentes Risikomass, das sich für alle symmetrischen Risiken einsetzen lässt.

Definition VaR: Verlust (effektiver Geldbetrag oder Prozentanteil), der mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit innerhalb eines bestimmten Zeithorizonts nicht überschritten wird.

Nachteile des VaR sind:

- beschreibt den grundsätzlichen Worst Case nicht
- beruht auf einer Schätzung bzw. einer angenommenen Verteilung (möglicherweise bedeutende Schätzfehler)
- beschreibt nicht, wie der Rand der Verteilung aussieht

Einige dieser Nachteile können allerdings durch die Verwendung geeigneter Methoden zumindest teilweise wieder ausgeglichen werden.

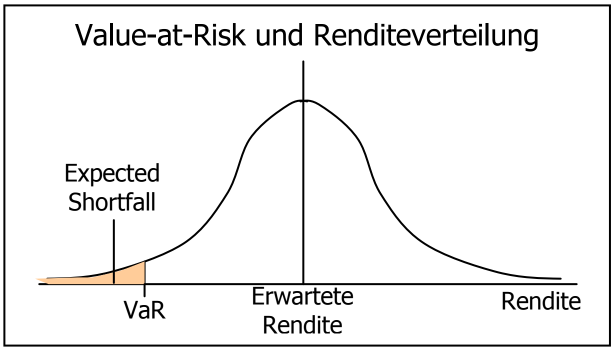
Alternative Risikomasse zum VaR sind:

- Angabe der gesamten Renditeverteilung

  - ist an sich wenig aussagekräftig
  - ermöglicht es jedoch, mehrere VaRs anzugeben (z.B. 95%, 99%, 99.9%)
- Ergänzung des VaR durch den bedingten Erwartungswert, falls der VaR überschritten wird ("Expected Shortfall")
- Standardabweichung (Volatilität)
  - symmetrisches Risikomass, d.h. positive und negative Abweichungen vom Erwartungswert werden gleich gewichtet
  - ungeeignet bei asymmetrischen Risiken (Kreditrisiken, Derivatrisiken)
  - bei speziellen Verteilungen (z.B. der Standardnormalverteilung) besteht eine 1:1 Beziehung zum VaR (z.B. 1,65σ = VaR 95%)

Die Formel für den Expected Shortfall lautet:

$$E(x \mid x < q) = \frac{\int_{-\infty}^{q} x \cdot f(x)dx}{\int_{-\infty}^{q} f(x)dx}$$



Es ist q=VaR-Rendite. Allerdings setzt diese Formel die Kenntnis der Verteilung voraus.

Die Formel für die Standardabweichung lautet:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

1.2 Wünschbare Eigenschaften eines Risikomasses

1.) Monotonie:

Ein Risikomass soll monoton sein, d.h. es muss gelten:
Wenn x_1, x_2 der Wert zweier Portfolios ist und gilt $x_1 \leq x_2$, so folgt für ein monotones Risikomass RM, das RM(x_1) ≤ RM(x_2).
In Worten: je grösser der Wert einer Position, desto höher das Risiko.
Diese Eigenschaft wird vom VaR erfüllt

2.) Translationsinvarianz:

RM (x + k) = RM(x) – k
Hier ist k Cash (und deshalb nicht risikobehaftet), x eine risikobehaftete Grösse, z.B. ein Aktienportfolio. Wird also zu einem Portfolio x ein Betrag k in Cash addiert, so reduziert sich das Risiko um genau diesen Betrag.
Diese Eigenschaft wird vom VaR erfüllt.

3.) Homogenität:

RM (b · x) = b · RM(x)
Wird in einem Portfolio x jede Einzelposition ver-b-facht (z.B. verdoppelt), so ver-b-facht sich auch das Risiko.
Diese Eigenschaft wird vom VaR erfüllt.

4.) Subadditivität:

RM(x_1 + x_2) ≤ RM(x_1) + RM(x_2)
Diversifikationseffekte sollen dafür sorgen, dass das Risiko von einem Portfolio geringer ist als die Summe der Einzelrisiken.
Diese Eigenschaft wird vom VaR nicht erfüllt!

Bsp.: Kreditrisiko

- Es bestehen 2 Positionen zu je CHF 1000. Jede Position hat eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 3%.
- VaR für jede Einzelposition einzeln: CHF 0 (in 95% der Fälle erhalte ich den Kredit zurück, sogar in 97% der Fälle).
- VaR für beide Positionen gemeinsam:
  - 0 Ausfälle in der Folgeperiode: $P = 0.97 \cdot 0.97 = 0.9409$; VaR = 0
  - 1 Ausfall in der Folgeperiode: $P = 0.97 \cdot 0.03 \cdot 2 = 0.0582 > 5\% \rightarrow VaR_2 = 1000$
  - 2 Ausfälle in der Folgeperiode: $P = 0.03 \cdot 0.03 = 0.0009 < 5\% \rightarrow VaR_3 = 0$
  - Total: $VaR_0 + VaR_1 + VaR_2 = 1000$

Es ist also beim VaR möglich, dass der VaR eines Portfolios grösser ist als die Summe der Einzel-VaRs. Die praktische Bedeutung ist jedoch minimal, tritt doch dieses Phänomen nur bei sogenannten Klumpenrisiken (hier versagen alle Kredite im Portfolio) auf. Klumpenrisiken sind aber in der Regel als solche bekannt und werden gesondert betrachtet.

1.3 Parameter des VaR

Der Value-at-Risk wird hauptsächlich von zwei Faktoren beeinflusst: dem Konfidenzniveau und dem Zeithorizont. Daneben spielt zwar auch noch die Grösse des Portfolios eine Rolle, diese hat jedoch einen rein skalierenden Einfluss.

Konfidenzniveau:
Grundsätzlich gilt, dass ein höherer kritischer Wert c (z.B. 95%, 99%...) einen höheren VaR zur Folge hat. Je höher jedoch das c, desto weniger Beobachtungen gibt es. Damit wird es schwierig, irgendwelche begründeten Modellannahmen zu treffen bzw. eine "richtige" Verteilung zu modellieren.

Aus diesem Grund wird, wenn der VaR als Benchmark (Vergleichsmass) eingesetzt wird, ein eher tiefes c gewählt. Um aussagekräftige Vergleiche z.B. zwischen zwei Kreditportfolios machen zu können, ist die Konsistenz der Bewertung vorrangig und somit die Berechnungsgenauigkeit wichtig.

Der VaR kann aber auch eingesetzt werden, um das benötigte Kapital zu bestimmen, um einen Konkurs zu vermeiden. Hier ist das c höher anzusetzen, weil eine Überschreitung des VaR das Unternehmen in seiner Existenz bedroht.

Eng mit der zweiten Fragestellung verwandt ist das Rating von Unternehmungen bzw. Obligationen.

Rating	Ausfallwahr-scheinlichkeit	Zeithorizont	Kritischer VaR Wert (c)
Aaa	0.02%	1 Jahr	99.98%
Baa	0.17%	1 Jahr	99.83%
B	2.32%	1 Jahr	97.68%

Zeithorizont:
Ein längerer Zeithorizont führt zu einem grösseren VaR. Dies ist logisch, wenn man sich ein Aktienportfolio vorstellt, das entweder 1 Tag oder 1 Jahr gehalten wird. Offensichtlich wird das Portfolio in 1 Jahr mehr schwanken als in 1 Tag, entsprechend ist der VaR ($= c \cdot \sigma$) höher.

Ein Portfolio werde über eine Periode T = n Tage gehalten. An jedem Handelstag bewegt sich der Markt unabhängig vom Vortag mit der immer gleichen Verteilung. Bekannt ist der VaR bzw. die Standardabweichung des Portfolios für t = 1 Tag.

$$Var\ (T) = Var\ (1) + Var\ (2) + Var\ (3) + \ldots + Var\ (n)$$
$$Var\ (T) = T \cdot Var\ (t)$$
$$\sigma(T) = \sigma(t) \cdot \sqrt{T}$$

Wenn die Bewegungen der Einzelperioden nicht als unabhängig angenommen werden können, muss die Kovarianz der einzelnen Tage oder Portfolios untereinander berücksichtigt werden. Für zwei Perioden R_t, R_{t+1} mit der Korrelation ρ gilt:

$$\sigma^2(R_t + R_{t+1}) = \sigma^2(R_t) + \sigma^2(R_{t+1}) + 2 \cdot Cov(R_t, R_{t+1})$$

wenn $\sigma(R_t) = \sigma(R_{t+1}) = \sigma(R)$, so gilt weiter:

$$\sigma^2(R_t + R_{t+1}) = \sigma^2(R) + \sigma^2(R) + 2 \cdot \rho \cdot \sigma^2(R)$$
$$\sigma^2(R_t + R_{t+1}) = \sigma^2(R) \cdot (2 + 2 \cdot \rho)$$

Wenn $\rho > 0$ steigt das Risiko stärker als mit $\sqrt{T}$, wenn $\rho < 0$ schwächer als mit $\sqrt{T}$.

Zu beachten ist, dass Portfolioveränderungen innerhalb der Laufzeit (z.B. durch Stop Loss Aufträge) die Skalierung beeinflussen.

1.4 Stress Testing

Der Value-at-Risk sagt nichts aus über den Worst Case. Unter Umständen kann zwar der Expected Shortfall berechnet werden, dies setzt jedoch eine gute Datenlage (Kenntnis der vollständigen Risikoverteilung und besonders der Verteilungsränder) voraus. Als Alternative kann der VaR durch sogenannte Stress Tests ergänzt werden.

Stress Tests umfassen vor allem die Szenarioanalyse, aber auch Modellanpassungen. Aus diesen Stress Tests lassen sich Massnahmen des Risk Management (Versicherung, Portfolioveränderung) ableiten.

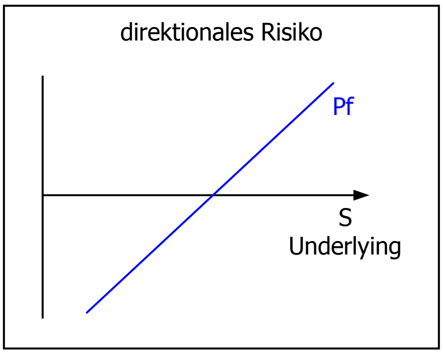
Szenarios umfassen:
- die Veränderung von Schlüsselvariablen (Input)
  - schwierig, ein realistisches Szenario zu definieren
- Historische Simulation
  - wie hätte sich ein Portfolio bei bestimmten Events (1987-Crash, Ölkrise, 11. September etc) verhalten
- Prospektive Szenarien
  - was passiert wenn?
  - Ereigniskaskaden

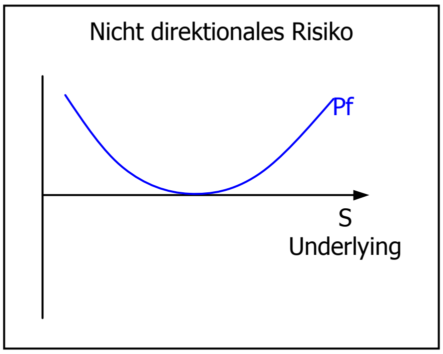
Das Ziel von Stress Test ist es nicht, eine vollständige Versicherung gegen alle Möglichkeiten zu entwickeln, sondern die Solvenz einer Unternehmung in realistischen/relevanten Szenarien sicherzustellen.

2. Marktrisiko

2.1 Grundlagen des Marktrisikos

Marktrisiko entsteht durch Wertschwankungen von Instrumenten (Titel, Portfolios, Derivate). Diese Schwankungen resultieren entweder aus Bewegungen im Level oder in der Volatilität von Marktpreisen. Marktrisiko kann absolut angegeben werden (in CHF, USD etc) oder relativ zu einer Benchmark (Abweichung z.B. vom SMI, DJIA etc). Relatives Risiko wird auch als Tracking Error bezeichnet. Es wird unterschieden nach direktionalem und nicht direktionalem Risiko. Direktionales Risiko heisst, dass sich der Portfoliowert proportional (oder umgekehrt proportionale) zum Underlying S bewegt. Eine einfache Long Position hat also direktionales Risiko. Nicht direktionales Risiko hat an einer Stelle ein globales Minimum. Nicht direktionale Risiken sind typischerweise mit Derivaten oder durch nicht lineare Approximation des Portfolio Wertes erzeugt.





Das Marktrisiko selbst bildet für gewöhnlich nur einen Teil des Gesamtrisikos, das mit einer Transaktion verbunden ist. Wenn mehrere Risikoklassen zusammenspielen, spricht man von Risikointeraktion. Risikointeraktion ist der Normalfall.

Bsp.: Risikointeraktion bei Devisenkauf
Wir kaufen 1 Millionen USD gegen CHF Spot zu Kurs USD/CHF 1.40. Das heisst, dass wir in 2 Bankwerktagen (Spot) 1 Million USD erhalten werden, dafür aber 1.4 Millionen CHF liefern müssen.

Diese Transaktion beinhaltet verschieden Risikoklassen:

1.) Marktrisiko Wechselkurs: wir vereinbaren heute einen Preis (den Spotkurs), erhalten aber die Ware (die USD) erst in 2 Bankwerktagen. Vielleicht bricht in der Zwischenzeit der Kurs des USD zusammen, und wir hätten die Dollar 2 Tage später in einer Overnight Transaktion zu einem Kurs von 1.30 erhalten können.

2.) Kreditrisiko: Angenommen, die Gegenpartei fällt nach 1 Tag aus. Uns entsteht zwar dadurch kein direkter Verlust (bei Default der Gegenpartei hat noch kein Geldaustausch stattgefunden), jedoch müssen wir eine neue Gegenpartei suchen zu möglicherweise schlechteren Konditionen.

3.) Settlement Risk: dieses Risiko gehört in die Klasse der operationellen Risiken. Bei der Abwicklung des Geschäfts kann etwas schief gehen, die Zahlung unserer Gegenpartei wird z.B. auf ein falsches Konto verbucht. Im Normalfall haften Bank oder Börse für diese Risiken.

2.2 Dekomposition von Risikoquellen

Wie gesehen resultieren Verluste aufgrund einer Kombination von mehreren Einzelfaktoren. Allgemein lassen sich Risiken in aufspalten in ein Exposure gegenüber einem Faktor und dem

Faktor selbst. Das Exposure bezeichnet die Sensitivität der Zielgrösse gegenüber einem Underlying.

Bsp.: Bond Duration
Die Modified Duration eines Bonds ist definiert als:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D_M \cdot \Delta y \rightarrow \text{Dollar Duration } D_D\text{: } \Delta P = -(D_M \cdot P) \cdot \Delta y = D_D \cdot \Delta y$$

Die (Dollar) Duration postuliert einen linearen Zusammenhang zwischen Yieldveränderung und Preisänderung. Der (Markt-) Wert des Bondportfolios hängt von den Preisen des Bonds ab. Verluste auf der Position entstehen entweder indirekt aufgrund einer Veränderung im Exposure oder direkt aufgrund einer Veränderung des Yield.

Ein höheres Exposure (hier einen höhere Duration) hat an sich noch keinen Effekt, erhöht aber die Auswirkungen einer Veränderung des Underlyings (hier des Yields). Mit steigendem Exposure steigt also das Risiko einer Position.

Für eine Aktie i lässt sich das Risiko der Aktie R_i darstellen als Risikodekomposition zwischen allgemeinem Marktrisiko R_M und dem Exposure der Aktie i gegenüber dem Markt β_i:

$$R_i = a_i + \beta_i \cdot R_M + \varepsilon_i \approx \beta_i \cdot R_M$$

Der Verlust ist also gleich dem Exposure mal eine adverse Veränderung der Variablen. So entsteht ein spezifisches Risiko (durch Restrisiko) auf dem Titel i. Wenn gilt:

$$R_i = \frac{\Delta P_i}{P_i}\text{, dann: } \Delta P_i = \beta_i \cdot P_i \cdot R_M + \varepsilon_i \cdot P_i$$

so folgt: $\mathrm{Var}(P_i) = \beta_i^2 \cdot P_i^2 \cdot \mathrm{Var}(R_M) + P_i^2 \cdot \mathrm{Var}(\varepsilon_i) + \mathrm{Cov}(...)$

Wenn mehr Risikofaktoren (z.B. Branchenindizes statt Marktindex) ins Modell aufgenommen werden, so führt dies zu einem kleineren ε_i. Es wird davon ausgegangen, dass die ε_i unkorreliert untereinander und mit den ε_j sind, sodass der Kovarianzterm aus der Berechnung der Preisvarianz $\mathrm{Var}(P_i)$ herausfällt. Da der Erwartungswert $E(\varepsilon_i) = 0$ ist, diversifiziert sich das ε_i weg. Für grosse Portfolios ist demnach das Restrisiko dank Diversifikationseffekten nicht mehr relevant.

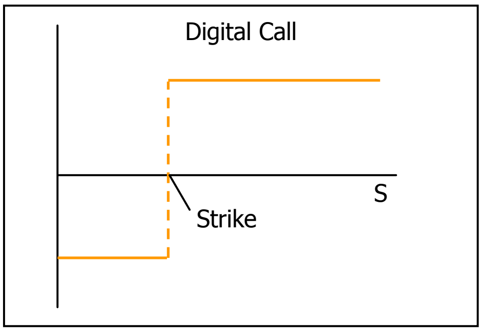
2.3 Diskontinuitäten und Event Risks

Bisher wurde implizit ein stetiger Verlauf der Renditeverteilung angenommen, woraus eine (zumindest abschnittsweise) monotone Risikoverteilung folgte. In der Realität treten aber in unregelmässigen, relativ grossen Abständen immer wieder Diskontinuitäten auf: (Kurs-) Sprünge innerhalb kurzer Zeitintervalle. Risiko das aus solchen unvorhersehbaren, nicht systematischen Ereignissen (Events) resultiert, wird als Event Risk bezeichnet.

Ein Beispiel für ein solches Event ist der Börsencrash vom 19.10.1987, als die Aktienindizes innerhalb eines Handelstages rund –20% Wert verloren.

Die bisher betrachteten Ansätze der Risikomessung (Exposure und VaR) eignen sich nicht für die Bestimmung von Event Risks. Das Exposure bildet eine lineare Approximation eines Marktmechanismus', die nur für kleine Kursbewegungen gilt. Der VaR ist für grosse

Kursausschläge auch ungeeignet, weil die Verteilungsränder nicht ausreichend bekannt sind. Zur Bestimmung von solchen Event Risks müssen Stress Tests durchgeführt werden.



Diskontinuitäten sind aber kein ausschliessliches Phänomen bei Risk Events. Auch viele Derivate haben nicht stetige Payoffs. Ein Digital Call auf USD/CHF zum Beispiel zahlt einen zuvor festgelegten Payoff, wenn das Underlying bei Expiry auf oder über Strike notiert. Für die Risikomessung solcher Instrumente sind der VaR-Ansatz oder das Exposure offensichtlich ungeeignet.

2.4 Risikoquellen im Marktrisiko

Devisen (Foreign Exchange, FX):

- flexible Wechselkurse: Wechselkursveränderungen
- fixe Wechselkurse: Auf- und Abwertungen (= Event Risks)
- Regimewechsel fix ←→ flexibel
- Typische Vola: 6% – 11% p.a.

Speziell bei FX-Produkten: Cross Rates

gegeben: S_1 (USD/GBP)
S_2 (USD/EUR)
gesucht: S_3 (S_1/S_2) = (EUR/GBP)
gesucht: $\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$

Zinsprodukte (Interest Rates, IR):

- Modellierung der Yieldänderungen → 'normales' Modell
  - $\Delta y \sim N$
  - $\sigma(\Delta y) = const$
- Modellierung der relativen Yieldänderungen → lognormales Modell
  - $\dfrac{\Delta y}{y} \sim N$
  - $\sigma\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right) = const$
- Konvertierung:
  - $\sigma(\Delta y) = \sigma\left(y \cdot \dfrac{\Delta y}{y}\right) = y \cdot \sigma\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)$

Aktienprodukte (Equities, EQ):

- Forwards und Futures:
  - $F_t \cdot e^{-r\tau} = S_t \cdot e^{-y\tau}$
  - mit: F_t = Futurespreis, r = Zinssatz, S_t = Aktienkurs, y = Dividen Yield, τ = Restlaufzeit

Commodities:

- Forwards und Futures:
  - $F_t \cdot e^{-r\tau} = S_t \cdot e^{-y\tau}$
  - hier: y = Convenience Yield
  - Convenience Yield: Vorteil der Lagerhaltung, je nach Verfügbarkeit sehr volatil

2.5 Modellierung der Risikofaktoren

Für die meisten Methoden ist eine mathematische Modellierung der Risikofaktoren (z.B. Renditeverteilungen) notwendig. Die einfachste solche Modellierung ist die Normalverteilung, deren besonderer Vorteil in ihrer Stabilität liegt: Linearkombinationen von Normalverteilungen sind wiederum normalverteilt.

Bsp.: Normalverteilte Renditen
Periodenrenditen werden berechnet nach der Formel und seien normalverteilt:

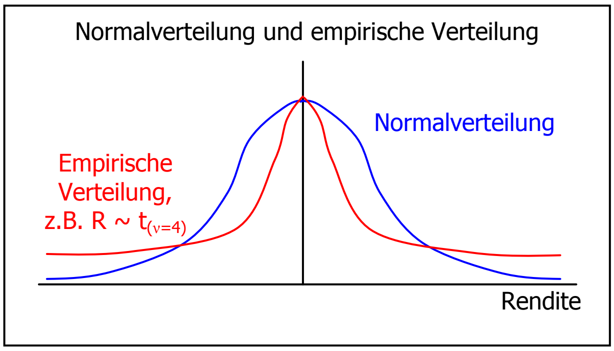
$$\frac{P_1 - P_0}{P_0} = R_1 \sim N$$

es folgt: $$P_1 \sim P_0 + N\left(P_0\mu, (P_0\sigma)^2\right)$$

Das impliziert jedoch die Möglichkeit negativer Preise in P_1. Aus diesem Grund wird gerne die lognormale Verteilung verwendet. Diese gilt für stetige Renditen:

$$r = \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \sim N \rightarrow P_1 \sim \text{logN}$$

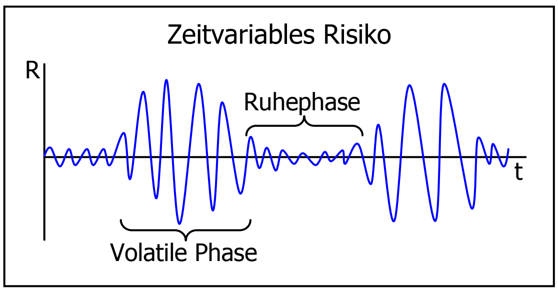
Die lognormale Verteilung ist nur für positive P_1 definiert. Damit sind negative Preise ausgeschlossen. Zudem liefert die Lognormalverteilung zumindest für kurze Zeithorizonte ähnliche Ergebnisse wie die Rendite mit normalverteilten Preisen.



Werden empirische Daten untersucht, so stellt man fest, dass sich diese oftmals nicht optimal durch die Normalverteilung abbilden lassen. Insbesondere beobachtet man in der Realität das Phänomen der "Fat Tails", dass also empirische Daten eine Kurtosis haben die über der der Normalverteilung liegt.

Verteilung	VaR (99%-Quantil)
$t_{\nu=1}$	-31.821σ
$t_{\nu=2}$	-6.965σ
$t_{\nu=4}$	-3.747σ
$t_{\nu=6}$	-3.143σ
$t_{\nu=\infty}$	-2.326σ
N	-2.326σ

Die Wahl der Verteilung hat eine direkte Auswirkung auf den VaR. In der kleinen Tabelle sind einige relative VaR für verschiedene Verteilungen aufgeführt.
Je mehr Freiheitsgrade ν eine t-Verteilung hat, desto niedriger ist das 99% Quantil. Je weniger Freiheitsgrade, desto stärker ausgeprägt sind die Fat Tails (desto höher ist die Kurtosis). Die t-Verteilung konvergiert für $\nu \rightarrow \infty$ gegen die Normalverteilung gemäss dem Zentralen Grenzwertsatz. Empirische Daten von Aktienrenditen über 1 Tag werden am besten durch eine t-Verteilung mit ν=4 Freiheitsgraden beschrieben.



Eine weitere empirische Beobachtung ist zeitvariables Risiko (Heteroskedastie der Renditen). Aktienrenditen weisen Phasen mit nur geringer Varianz und Phasen hoher Varianz aus. Unter der Annahme einer Normalverteilung sind stetige Renditen also wie folgt verteilt:

$$r_t \sim N(\mu, \sigma_t^2)$$

Anstelle des σ_t^2 wird h_t gesetzt (bedingte Varianz). Eine Möglichkeit, ein zeitvariables Risiko wie in der Grafik dargestellt zu simulieren ist der GARCH Prozess:

$$\text{GARCH}(1,1)\text{: } h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot r_{t-1}^2 + \beta \cdot h_{t-1}$$

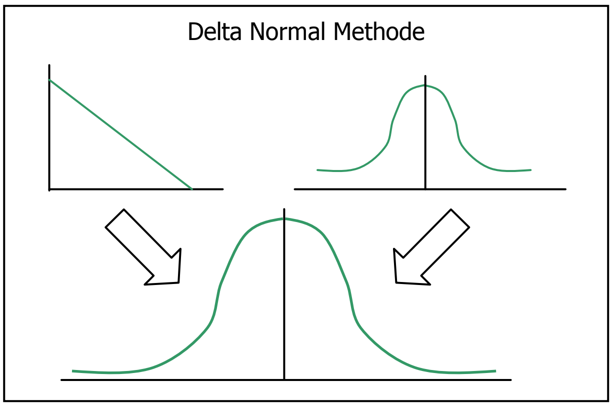
Eine hohe Bewegung in t–1 treibt h_t nach oben, die Varianz zeigt Persistenz. Weil die Varianz im Zeitablauf nicht mehr konstant ist, kann die $\sqrt{T}$ -Regel nicht mehr angewandt werden[1]. Eine spezielle Form des GARCH Prozesses ist der EWMA (exponentially weighted moving average):

$$h_t = \lambda \cdot h_{t-1} + (1-\lambda) \cdot r_{t-1}^2$$

Empirisch ergeben sich Werte für λ von λ=0.94 für tägliche Daten und λ=0.97 für Monatsdaten.

Einen anderen Ansatz wählt die Methode der sogenannten impliziten Volatilität, die die Volatilität der Zielgrösse von einem Instrument mit Vorlauf ableitet, dessen Volatilität unmittelbar pricingrelevant ist.

Die bisher vorgestellten Methoden sind unabhängig von der Form der Risikomessung, weil sie sich auf die (Risiko-) Verteilung des Faktors bzw. dessen Varianz beziehen. Für den VaR Ansatz der Risikomessung gibt es gesonderte Methoden der Risikomodellierung. Insbesondere unterscheidet man hier die volle Risikobewertung von der lokalen Bewertung.



Bei der lokalen Bewertung wird für das Exposure eine lineare Approximation unterstellt, während für den Faktor eine Normalverteilung Verteilung angenommen ist. Die Linearkombination von Exposure und Faktor führt wiederum zu einer Normalverteilung. Als Beispiel sei hier das Bondpricing genannt, bei dem ein linearer Zusammenhang zwischen Zins und Bondpreis unterstellt wird (Duration). Das Exposure des Bondpreises gegenüber einer Zinsänderung kann geschrieben werden als:

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \Delta y = -DP \cdot \Delta y$$

Das Exposure lässt sich in einer Variable messen (δ = Mass für das Exposure). Man spricht deshalb bei einem linearen Ansatz für das Exposure von Delta Normal Methode. Die Delta Normal Methode lässt sich recht einfach berechnen, ist aber für grosse Änderungen des Faktors ungeeignet, weil die Approximation nur für relativ kleine Faktoränderungen gut ist. Mit der Delta Normal Methode lassen sich keine nichtlinearen Effekte im Exposure berücksichtigen.

[1] Siehe Parameter des VaR, S. 4

Eine Erweiterung zur Delta Normal Methode stellt die Delta Gamma Methode dar. Anstelle einer linearen Approximation des Exposures wird hier ein zweiter Term in die Approximation hineingenommen, namentlich:

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial^2 y} \cdot (\Delta y)^2$$

$$\Delta P = -DP \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \cdot C \cdot P \cdot (\Delta y)^2$$

Das ist nichts anderes als eine Taylor Approximation, die nach dem zweiten Glied abgebrochen wurde. Nach diesem Muster können natürlich auch weitere Terme in die Approximation aufgenommen werden, wodurch die Schätzung des Exposures immer besser wird, die Berechnung allerdings auch immer komplexer.

Einen ganz anderen Ansatz für die Modellierung des VaR wählt die historische Simulation. Der Ansatz ist eng mit der Szenarioanalyse verwandt. Bei der Historischen Simulation wird die tatsächliche Verteilung des Faktors über die letzten T Perioden betrachtet. Die Daten werden aufsteigend sortiert. Als VaR wird derjenige Wert genommen, für den es α% schlechtere Werte in der Datensammlung gibt, also der "($T \cdot \alpha$) schlechteste Wert".

Bsp.: Historische Simulation
Zu bestimmen ist der VaR(95%, 1d) der Rendite auf einem Aktienportfolio. Als Methode wird die historische Simulation über die letzten T = 250 Handelstage gewählt.

1.) Die Tagesrenditen auf dem Portfolio der letzten T = 250 Handelstage werden berechnet und aufsteigend sortiert.
2.) α = 5%, gesucht ist also jener Wert, zu dem es noch 5% schlechtere Werte im Datensatz gibt.
3.) T = 250, α = 5%, $T \cdot \alpha = 250 \cdot 5\% = 12$. Gesucht ist der 12.-schlechteste Wert. Dieser entspricht der VaR-Rendite (95%, 1d) des Portefeuilles.

Der grosse Vorteil der historischen Simulation ist, dass man keine Annahmen über die zugrundeliegende Verteilung machen muss. Allerdings hängt das Ergebnis der Simulation stark vom gewählten Zeitfenster ab. Schocks innerhalb der Simulationsperiode können das Ergebnis verzerren.

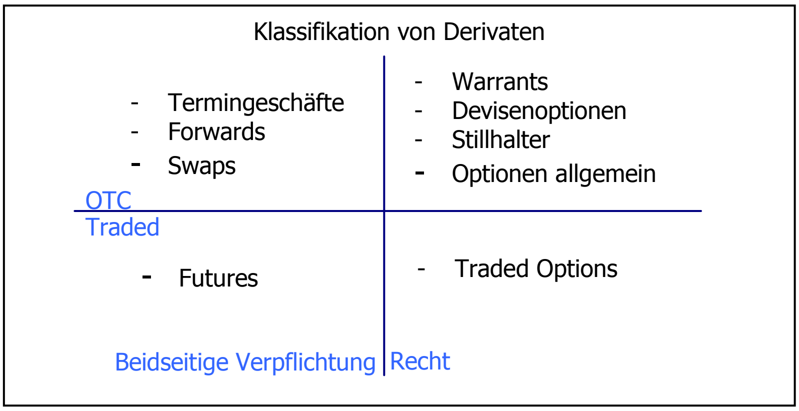
Diesen Nachteil der Historischen Simulation versucht die Monte Carlo Simulation zu eliminieren. Anstelle der historischen Daten wird bei der Monte Carlo Simulation T mal der Faktorwert (zum Beispiel die Portfoliorendite) generiert. Die gezogenen Werte werden wie bei der historischen Simulation sortiert und das dem VaR entsprechende Quantil kann abgelesen werden.

Der Vorteil der Monte Carlo Simulation ist ihre Flexibilität. Der Nachteil ist aber der verhältnismässig grosse Rechenaufwand. Zudem entsteht durch die Wahl der Zufallsverteilung und ihrer Parameter, aus der die Faktorwerte generiert werden, ein Modellrisiko.

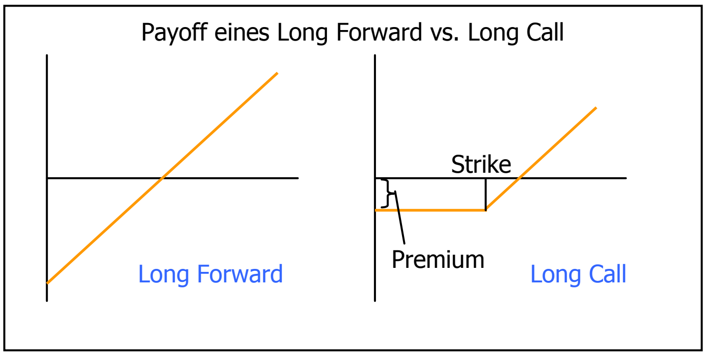
3. Risikomanagement mit Derivaten

3.1 Charakterisierung

Die Definition von Derivaten ist nicht einfach. "Ein Derivat ist ein Instrument, dessen Wert sich vom Wert eines anderen Instruments ableitet. Es ist eine Option auf eine Referenzgrösse." Unter dieser breiten Definition ist quasi jedes Finanzinstrument ein Derivat.

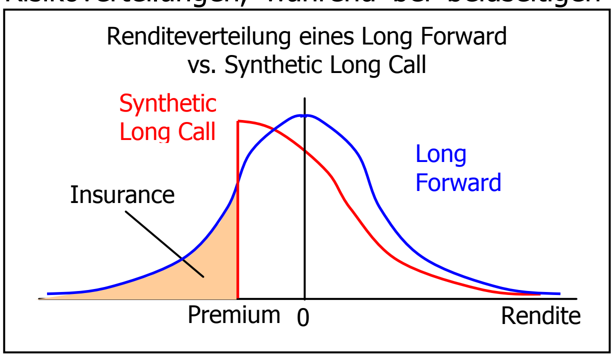


Wird die Praktikerdefinition von Derivaten verwendet (ein Derivat ist das, was mit Derivat angeschrieben ist), so lassen sich diese nach zwei Kriterien klassifizieren. Unterschieden werden OTC-Derivatives (Over The Counter) von Traded-Derivatives (börsengehandelte Derivate). Weiter kann unterschieden werden zwischen Instrumenten, die ein Recht (aber keine Verpflichtung) begründen, und Instrumenten, die eine beidseitige Verpflichtung begründen.



Eine beidseitige Verpflichtung hat im Erwartungswert den Wert Null, wenn der Forwardpreis richtig berechnet wurde. Der Forwardpreis berechnet sich aufgrund eines Modells. Beidseitige Verpflichtungen haben ein symmetrisches Risiko bzw. ein symmetrisches Gewinn/Verlust Profil.

Optionen haben zu Strike den Wert der bezahlten Prämie. Das Risiko einer Option ist asymmetrisch. Die Wahl des Strike Price ist arbiträr, hat jedoch einen Einfluss auf den (potentiellen) Wert der Option und damit auf die Optionsprämie. Durch die asymmetrische Gewinnverteilung ergeben sich 'ungewöhnliche' Risikoverteilungen, während bei beidseitigen Verpflichtungen die Verteilungseigenschaften des Underlyings weitgehend erhalten bleiben.



Ein Portfolio, das mit einer Putoption gegen Kursverluste abgesichert ist (Portfolio Insurance, Synthetic Long Call), hat eine Verlustverteilung, die nicht symmetrisch ist. Verluste grösser als die Prämie der Putoption sind nicht möglich.

3.2 OTC vs. Traded Derivatives

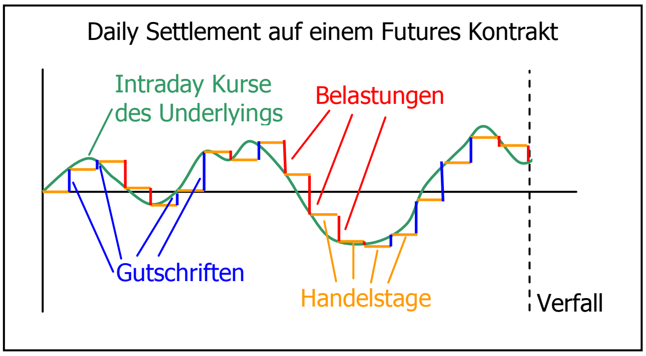
OTC heisst "Over The Counter". OTC Produkte sind nicht börsengehandelt, sondern werden speziell nach den Kundenwünschen erstellt. Forwards werden vor allem im FX Geschäft häufig verwendet (Termingeschäfte). Bei einem solchen Forward verpflichtet sich die Partei A heute, der Partei B am Stichtag zum Beispiel 1 Million USD zum Kurs F zu liefern. Im

Gegenzug verpflichtet sich Partei B, am Stichtag den Gegenwert in CHF zu dieser 1 Million USD zum Kurs F an Partei A zu liefern. Mit einem solchen Geschäft lässt sich das Marktrisiko für die Parteien A und B aus einer Kursveränderung USD/CHF ausschliessen.

Wenn allerdings eine Partei vor Verfall aus dem Forward aussteigen will, muss sie die Position glattstellen. Das bedeutet, sie muss entweder eine Gegenposition begründen (sodass sie zum Stichtag flat ist) oder sie muss ihre Verpflichtung an eine Gegenpartei abtreten. Eine solche Gegenposition kann nicht automatisch begründet werden, es entsteht ein Liquiditätsrisiko.

Wenn ein Forward bis Verfall gehalten wird, so besteht die Möglichkeit, dass die Gegenpartei nicht in der Lage ist, ihre Verpflichtung zu erfüllen. Vielleicht verfügt Partei B gar nicht über die F Millionen CHF. Der Forward ist also mit einem Kreditrisiko behaftet. Da die Gewinne der Partei A den Verlusten der Partei B entsprechen, ist das Kreditrisiko umso höher, je höher der Gewinn der Partei A.

Futures Kontrakte sind anders strukturiert. Die Gegenpartei in einem Futures Geschäft ist immer die Börse. Dadurch wird das Kreditrisiko (Gegenparteirisiko) minimiert. Die Börse hat drei Funktionen: sie stellt das Handelssystem zur Verfügung, ist für Clearing und Settlement besorgt und tritt als rechtliche Einheit (juristische Gegenpartei im Futuresgeschäft) auf. Die Anfänge des Futures Geschäfts stammen aus den Commodity Märkten. Börsengehandelte Finanzderivate existieren erst seit 1973 (Aktienoptionenhandel in Chicago), standardisierte Finanz Furutres seit 1980.



Finanz Futures sind hochstandardisiert. Das Underlying (Basis) eines Futures wird durch die Börse vorgegeben, ebenso die Kontraktgrösse, das Round Lot (minimale Anzahgl gehandelter Kontrakte pro Geschäft), die Laufzeiten und die Verfallsdaten (für gewöhnlich 4 mal im Jahr). Futures weisen gewöhnlich ein sehr hohes Leverage auf (z.B. Futures auf SMI Index: Veränderung um 1 Indexpunkt entspricht Veränderung im Futureskurs von CHF 10). Die Börse verlangt die Hinterlegung einer Sicherheitsmarge auf einem Sperrkonto. Es findet ein tägliches Settlement statt: am Ende des Handelstages werden Gewinne und Verluste dem Margenkonto gutgeschrieben. Durch das tägliche Settlement kann eine Position jederzeit veräussert werden, es herrscht jederzeit Transparenz. Wenn die Verluste die Sicherheitsmarge auf dem Margenkonto aufbrauchen, ergeht ein sogenannter Margin Call[2]. Nach ergehen eines Margin Calls bleiben 36 bis 48 Stunden, um die Marge zur erhöhen, ansonsten wird die Position liquidiert.

[2] Margin Calls sind kein Phänomen der Futures Märkte. Mittels eines (Lombard) Kredits können z.B. Aktienportfolios belehnt werden, ein Portfolio aus Schweizer Aktien z.B. bis zu 60%. Für ein Portfolio im Wert von CHF 100'000 also bis zu CHF 60'000. Die Sicherheitsmarge beträgt CHF 40'000. Ein Kurssturz um 20% vermindert die maximale Kreditsumme auf CHF 48'000, die Schuld ist aber noch immer 60'000, es besteht also eine Kreditüberschreitung von CHF 12'000. Diese Überschreitung wird ins Verhältnis gesetzt zur verbliebenen Marge (hier CHF 32'000), im Beispiel beträgt die Überschreitung 37.5%. In der Schweiz ist es Usanz, dem Kunden bis zu einer Überschreitung um 25% 3 Wochen Zeit zu lassen bis die Position liquidiert wird, bei einer Überschreitung bis 50% 7 Tage und bei einer Überschreitung über 50% 48 Stunden.

In den Märkten für Traded Derivatives allgemein treten sogenannte Market Makers auf (zumeist Banken oder Börsen), die sich verpflichten, jederzeit Geld- und Briefkurse zu stellen.

3.3 Implikationen für das Risk Management

OTC Produkte sind "taylor made", also speziell auf die Bedürfnisse des jeweiligen Kunden abgestimmt. Entsprechend sind OTC Derivate auf ein spezifische Einzelrisiko hin kalibrierbar und die Absicherung lässt sich sehr genau steuern. Dafür sind OTC Produkte von Natur aus illiquide. Verändern sich aus irgendwelchen Gründen die Absicherungsbedürfnisse des Risiko Managements ist eine schwierige, d.h. kostspielige Veränderung der Position notwendig. OTC Produkte tragen ein Liquiditätsrisiko. Unter Umständen kommt dazu ein Gegenparteirisiko (Kreditrisiko), das umso grösser ist, je mehr wir selbst von einer Absicherungsstrategie profitieren, weil unsere Gewinne Verlusten der Gegenpartei entsprechen.

Traded Derivatives demgegenüber sind hochliquide, eignen sich aber nur für die Absicherung allegemeiner Risiken (z.B. Schwankungen des Aktienkurses oder innerhalb der Hauptwährungen). Die hohe Standardisierung macht eine genaue Abstimmung auf das eigene Exposure unmöglich. Anstelle von Gegenpartei- und Liquiditätsrisiko tritt bei den Traded Derivatives das Basisrisiko, das von einer nicht parallelen Entwicklung der eigenen Risikoposition mit dem Underlying des Derivates herrührt.

3.4 Hedging mit Futures

Ziel des Hedging ist es, die Varianz einer Position zu minimieren oder gar auszugleichen. Es stellen sich zwei Fragen:

- Wie stark soll der Ausgleich sein? Diese Frage bezieht sich auf die Risikopräferenz des Anlegers.
- Wie stark kann der Ausgleich sein? Diese Frage bezieht sich auf das Basisrisiko.

Grundsätzlich setzt sich die Variation eines gehedgeten Portfolios aus zwei Grössen zusammen: der Variation des Underlyings und der (gegenläufigen) Variation des Hedges (in diesem Falle der Futureskontrakte). Es gilt:

$$\Delta V = \Delta P + n \cdot \Delta F$$

Es bedeuten ΔV die Veränderung des Portfoliowertes (Value), ΔP die Veränderung des Underlyings (Position), ΔF die Wertveränderung eines Futures Kontraktes und n die Anzahl Kontrakte. Wenn $n > 0$ spricht man von einer long Position, wenn $n < 0$ von einer short Position. Ziel ist:

$$\min \mathrm{Var}(\Delta P + n \cdot \Delta F)$$

also: $$\min [\mathrm{Var}(\Delta P) + n^2 \mathrm{Var}(\Delta F) + 2n \mathrm{Cov}(\Delta P, \Delta F)]$$

Die Optimierung findet immer bezogen auf n statt, denn die Anzahl Kontrakte ist die einzige beeinflussbare Grösse.

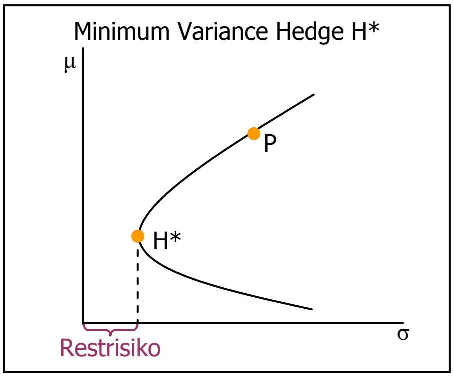
$$\frac{\partial Var(\bullet)}{\partial n} = 0 = 2n \cdot Var(\Delta F) + 2Cov(\Delta P, \Delta F)$$

sodass: $$n^* = -\frac{Cov(\Delta P, \Delta F)}{Var(\Delta F)}$$

Dieser Ausdruck kann auch geschrieben werden als:

$$n^* = -\frac{Cov(R_P, R_F)}{Var(R_F)} \cdot \frac{P}{F}$$

Der Bruch von Kovarianz über Varianz lässt sich wiederum als Beta des Portfolios zum Futures interpretieren. Durch den Kauf (bzw. Verkauf) der geeigneten Anzahl Futureskontrakte lässt sich ein Minimal Variance Portfolio erzeugen. Man spricht deshalb vom Minimal Variance Hedge. Häufig ist aber auch dieses MV Portfolio mit einem Restrisiko behaftet abhängig von der Korrelation zwischen Portfolio und Underlying des Fututres (zur Erinnerung: Futures werden nur auf wenigen, hochstandardisierten Underlyings angeboten). Ob und in welcher Höhe ein Restrisiko besteht, lässt sich berechnen nach folgender Formel:

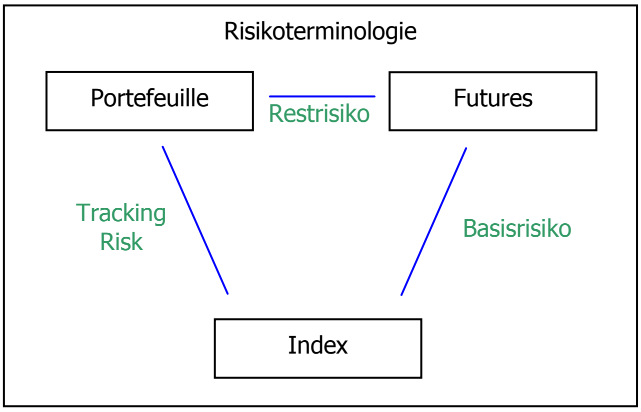


$$\sigma_{H^*} = \sigma_P \cdot \sqrt{1-\rho_{PF}^2}$$

In Worten: wenn Futures und Portfolio vollständig korreliert sind, kann das Risiko vollständig abgehedget werden. Dementsprechend wird der Ausdruck $\sqrt{1-\rho_{PF}^2}$ auch als Qualität eines Hedges bezeichnet.

Im Allgemeinen gibt es keinen einzelnen Future, der ein Portfolio vollständig abdeckt. Ein Investor hat nun die Wahl, unterschiedliche Teile seines Portfolios mit verschiedenen Futures abzusichern, oder aber einen einzelnen Future zu wählen, der das Gesamtportfolio in etwa abbildet. Werden einzelne Teile eines Portefeuilles mit unterschiedlichen Futures abgehedget, so erhöht sich die Korrelation zwischen Hedge und Portfolio, das Restrisiko sinkt. Dafür nimmt man aber eine tiefere Liquidität des Hedges in Kauf, weil spezifischere Futures in illiquideren Märkten gehandelt werden als allgemeine Futures. Für gewöhnlich ist höhere Liquidität vorzuziehen.

Noch ein Wort zur Terminologie. Bei der Portfolioabsicherung werden drei Arten von Risiko unterschieden: Tracking Risk, Basis Risk und Restrisiko. Das Tracking Risk bezeichnet das Risiko, welches aus einer nicht parallelen Verschiebung von Portefeuille und Underlying des Futures entsteht, Basis Risk bezeichnet das Risiko aus nicht parallelen Bewegungen von Futureskurs und Underlying, und das Restrisiko bezeichnet das Risiko, welches aus einer nicht vollkommenen Absicherung des Portfolios durch den Hedge resultiert. In der Theorie sollte sich ein Forward mit Korrelation 1 parallel zum entsprechenden Index-Underlying entwickeln, weil für Futurespreise sich ergeben als:



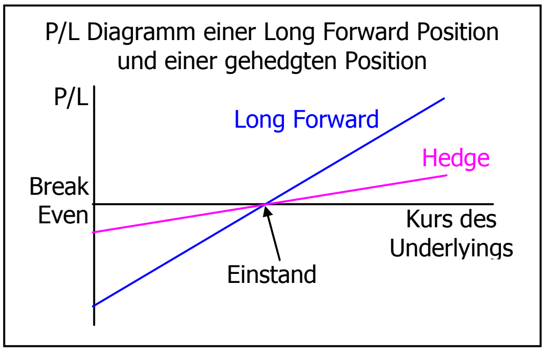
$$F_{t,T}^{arb} = I_t \cdot e^{(r-\delta)(T-t)}$$

Der Stillhalter wird in diesem Modell für den Zinsausfall entschädigt, den er durch das halten des Index erleidet. Dafür profitiert er von den Dividendenzahlungen. Durch Arbitrage sollte die obige Gleichung immer gelten, sodass $\rho_{FI} = 1$

In der empirischen Beobachtung ist aber $\rho_{FI} < 1$, weil in r ein Zinsänderungsrisiko und in δ eine Dividendenunsicherheit enthalten ist. Zudem ist der Futuresmarkt in der Regel effizienter als der Index, das heisst Preisanpassungen erfolgen schneller. Und schliesslich ist Arbitrage nicht immer effizient, weil Preisanpassungen mit Kosten verbunden sind und Liquidität eingesetzt werden muss.

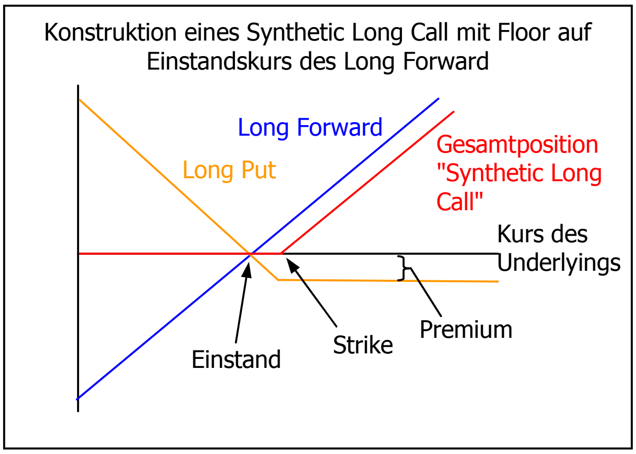
3.5 Portfolioabsicherung mit Optionen

Die Finanzinstitute haben in den letzten Jahren für praktisch jedes Absicherungsbedürfnis ein spezifisches Derivatprodukt auf den Markt gebracht. Mittels exotischer Optionen können auch hochkomplexe Hedgingstrategien implementiert werden. Für die klassische Portfolio Insurance reicht jedoch eine einfache Put- bzw. Call-Option (sogenannte Plain Vanilla Optionen), je nachdem auf welche Seite hin man sich absichern will.



Um solche Optionsstrategien zu verstehen, ist es oft sinnvoll, ein sogenanntes Payoff Diagramm (auch als Profit/Loss (P/L) Diagramm bezeichnet) einzusetzen. Dieses Diagramm zeigt den Wert der Position in Abhängigkeit von der Bewegung des Underlyings, für gewöhnlich relativ zum Einstandspreis.

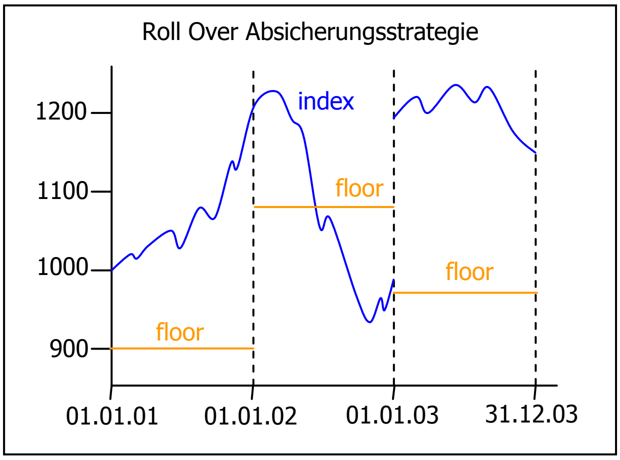
Weil die Korrelation zwischen Hedge und Portfolio niemals perfekt ist, lässt sich zwar die Variation des Portfolios minimieren, nicht aber ganz ausschliessen.



Anstelle eines (Futures-) Hedge kann auch eine Absicherungsstrategie mit Optionen begründet werden. Die Idee ist, dass Verluste auf der Position durch die Option genau kompensiert werden, von Gewinnen auf dem Underlying aber trotzdem profitiert werden kann. Dies lässt sich zum Beispiel durch den Kauf einer Put Option (Long Put) bei einer Long Forward Position erreichen. Unterhalb dem Strike Price zahlt der Put, oberhalb entstehen aber keine weiteren Kosten. Die Kombination einer Long Forward Position mit einem Long Put wird als Synthetic Long Call bezeichnet, weil das Payout Diagramm dem einer Call Option entspricht. Im gezeigten Beispiel wurde das Downside Risk (also das Risiko von Kursverlusten unter den Einstandspreis der Long Forward Position) vollkommen ausgeglichen. Bezahlt wird diese Absicherung mit dem niedrigeren Gewinnpotential: die Gesamtposition erwirtschaftet erst bei Kursen über Strike einen Gewinn, während die Long Forward Position für sich allein genommen schon ab Einstand einen Gewinn erwirtschaftet. Oberhalb Strike partizipiert die Gesamtposition am Gewinn genau gleich wie der "nackte" Long Forward.

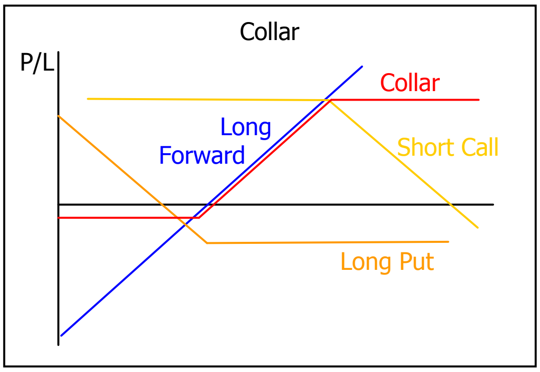
Vor allem börsengehandelte Optionen haben (wie Futures) typischerweise kurze Laufzeiten bis zu einem Jahr. Sollen mittels Optionen Positionen über längere Zeiträume abgesichert werden, so muss eine Roll Over Strategie implementiert werden.

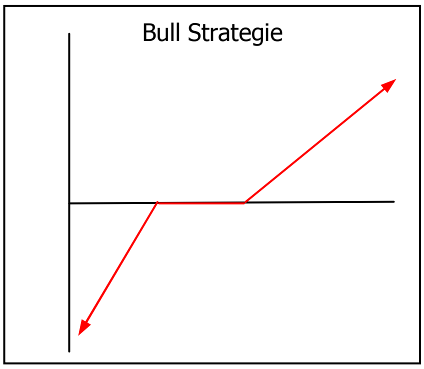
Bsp.: Roll Over Strategie mit Optionen
Aufgabe: Ein Indexportfolio soll für drei Jahre abgesichert werden. Der maximale Verlust soll dabei 10% nicht überschreiten. Zu diesem Zweck wird jeweils zu Beginn des Jahres eine Putoption gekauft mit Strike zu 90% des Tageskurses. Unmittelbar vor Ende der Laufzeit wird die Option verkauft und eine neue Option gekauft (entspricht Cash Settlement, keine physische Lieferung). Am 01.01.01 notiere der Index auf 1000 Punkten, wir kaufen also eine Putoption mit Strike 900 und Laufzeit 1 Jahr. Am 31.12.01 notiere der Index auf 1200 Punkten und die Option verfällt. Eine neue Option wird abgeschlossen mit Strike 1080 (=0.9 · 1200), Laufzeit wiederum ein Jahr. Am 31.12.02 notiert der Index nach einem Crash auf 980 Punkten. Die Option wird ausgeübt und zahlt 100. Für diese 100 wird der Index nachgekauft (sodass die Position wieder einen Wert von 1080 hat) und erneut eine Option abgeschlossen, diesmal mit Strike 972 (=0.9 · 1080).

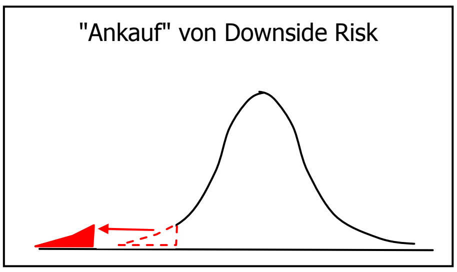


Ein Wort noch zu Implementation: wenn die ex post Verluste auf 90% beschränkte werden sollen, so muss der Floor de facto etwas höher angesetzt werden, weil die Prämie bezahlt sein muss. Wir das obige Beispiel berechnet, so führt ein Strike von 92.6% zusammen mit der Prämie zu einem Floor von 90%. Das Exposure setzt sich jetzt zusammen aus 97.1% Aktienexposure und 2.9% Exposure aus dem Put. Der Put kostet also etwa 2.9% des Vermögens jedes Jahr.

Als Variante zum Synthetic Long Call kann auch ein Collar generiert werden, der das Gewinnpotential zusätzlich nach oben begrenzt, um damit zumindest einen Teil der Prämie zu zahlen. Ein Collar besteht aus einem Long Forward, einem Long Put und einem Short Call, wobei der Strike des Calls, X_C über dem Strike des Puts X_P liegt.



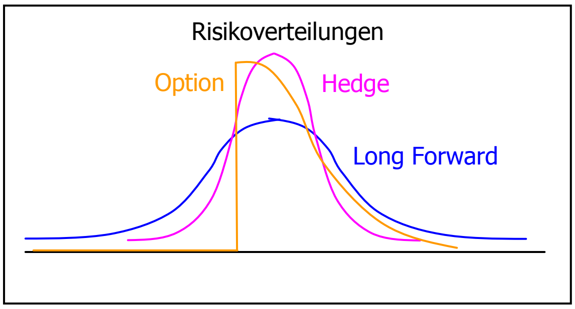




Eine dritte Alternative ist, den Long Put mit einem Short Put mit tieferem Strike zu finanzieren. Die Idee dieser Strategie ist es, das Downside Risk in eine Region zu verlegen, "die eh nie auftritt". So kann man unbegrenzt und scheinbar kostenlos von Gewinnen profitieren, doch ist diese Strategie sehr gefährlich, weil es im Worst Case auf ein Double Up hinausläuft: wenn der Kurs einmal in den Bereich des zweiten Strikes rutscht, ist man einem umso höheren Downside Risk ausgesetzt: weil ein Put mit einem tiefen Strike weniger zahlt, müssen mehr Kontrakte mit tiefem Strike abgeschlossen werden, um den hohen Strike zahlen zu können. Unter dieser Strategie ist LPM 0 unverändert, ebenso VaR und damit die Limiten, das LPM 1 ist jedoch massiv erhöht.

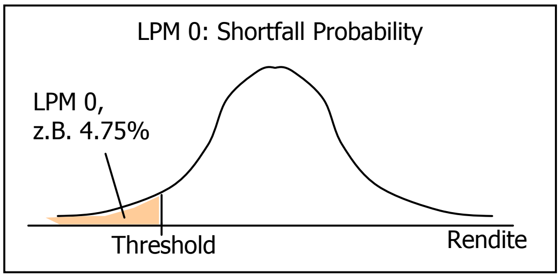
Werden Risiken mit Optionen abgesichert, so ergibt sich immer ein stark asymmetrisches Risiko. Während Futureshedges die Varianz des Underlyings dämpfen, die Form der Risikoverteilung aber nicht grundsätzlich verändern, haben Optionen Risikoverteilungen, die nur noch wenig mit dem ursprünglichen Produkt zu tun haben.

Durch die Asymmetrie der Risikoverteilung werden viele der bekannten Masse zur Portfoliobewertung resp. Performancemessung nutzlos. Wird zum Beispiel ein Portfolio mit 0% Absicherung (kein Put) mit einem Portfolio mit 100% Absicherung (Break Even des Puts entspricht Einstandskurs des Long Forward) verglichen, so ergibt sich nur ein geringer Unterschied der Volatilitäten: $\sigma(0\%) = 18.88\%$, $\sigma(100\%) = 15.17\%$. Das ist darauf zurückzuführen, dass Vola auf der Downside verkauft wird, von Vola auf der Upside aber nach wie vor profitiert werden kann. Merke: die Volatilität sagt nichts über das Risiko einer asymmetrischen Verteilung aus. Dementsprechend sagt zum Beispiel aus die Sharp Ratio nichts über die Performance aus und wird praktisch nutzlos. Und auch die Strategie der Maximierung der Sharp Ratio ist sinnlos, weil nicht mehr das relevante Risikoverhältnis betrachtet wird.

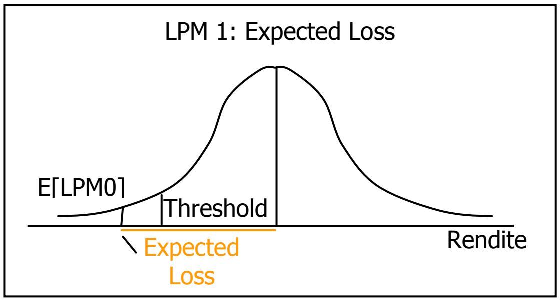


Notwendig ist also ein Risikomass für asymmetrische Verteilungen, ein asymmetrisches Risikomass. Die Statistik bietet zu diesem Zweck die sogenannten Lower Partial Moment (unteren Teilmomente LPM) an.

1.) LPM 0: Shortfall Probability
"Wie gross ist ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Verlust nach einer Periode eine arbiträre Schmerzgrenze (den "Threshold") übersteigt?" Die Shortfall Probability bildet gewissermassen das Gegenstück zum VaR, der fragt: "Wie gross ist der Verlust nach einer Periode mit einer Wahrscheinlichkeit von α%?". Die Shortfall Probability sagt nichts aus über die Höhe des tatsächlichen Verlustes. Zudem ist das Konzept aus mathematisch statistischen Gründen (zugrundeliegende Verteilungsfunktion) nicht für asymmetrische Verteilungen geeignet.



2.) LPM 1: Expected Loss
Der Expected Loss fragt nach der erwarteten Höhe eines Verlustet, wenn einmal ein Verlust jenseits des Threshold eingetreten ist. Das LPM 1 entspricht also in gewisser Weise dem Erwartungswert des LPM 0. Der Expected Loss berechnet sich nach folgender Formel:



$$E(\tilde{r} \mid \tilde{r} < r^*) = \int_{-\infty}^{r^*} r \cdot f(r) dr$$

Der Expected Loss erfüllt wichtige Eigenschaften und Anforderungen eines Risikomasses, die sogenannten Coherent Risk Measures. Entsprechend spielt er eine wichtige Rolle in der Risikoanalyse.

3.) LPM 2: Loss Volatility
Die Loss Volatility beschreibt, wie stark ein Shortfall (das heisst, der Verlust ist grösser als der Threshold) um den Expected Loss streut. Das LPM 2 ist eigentlich die Varianz, aus Konsistenzgründen wird jedoch die Standardabweichung verwendet:

$$Loss\,Volatility = \sqrt{LPM\,2} = \sqrt{Var(\tilde{r} \mid \tilde{r} < r^*)}$$

Analog zur Sharp Ratio werden nun die Return to Shortfall (RTS) Masse definiert:

$$RTS1 = \frac{R_P - R}{LPM1} \qquad RTS2 = \frac{R_P - R}{\sqrt{LPM\,2}}$$

4. Commodities

4.1 Commodity Futures

Commodities enthalten alle Rohwaren und Rohstoffe, aber auch viele Betriebsstoffe. Zu den Commodities zählen unter anderem: Edelmetalle (Silber, Gold, Platin...) , Industriemetalle (Kupfer, Stahl, Aluminium...), Landwirtschaftliche Erzeugnisse (Mais, Weizen, Kaffee...) und Energie (Heizöl, Rohöl, Elektrizität...).

Es stellt sich die Frage, wie sich Produktionsentscheidungen verändern, wenn Preisrisiken durch Commodity Futures abgesichert werden können. Dabei werden einige Annahmen getroffen: es gibt kein Mengenrisiko, jede produzierte Menge q kann zum zukünftigen Preis p abgesetzt werden. Es gibt kein Qualitätsrisiko. Und schliesslich existiert kein Basisrisiko, das heisst unser Hedge wird sich genau parallel zum Preis entwickeln. Mit anderen Worten: im Zeitpunkt 0 sind bis auf den zukünftigen Preis in der Periode 1 alle relevanten Daten fix gegeben.

Der Gewinn am Ende der Periode berechnet sich nach der Formel:

$$\tilde{\pi} = \tilde{p} \cdot q - c(q) + n \cdot (\tilde{p} - f)$$

Wobei:
- $\tilde{p}$: Preis in der Periode 1 (mit Unsicherheit behaftet, deshalb das ~)
- q: Menge, die während der Periode produziert und am Ende verkauft wird
- c(q): Produktionskosten
- n: Anzahl Terminkontrakte
- f: Terminpreis (heutiger Preis für ein am Ende der Periode geliefertes Gut)

Die Parameter q und n werden vom Produzenten bestimmt. Alle anderen Grössen sind exogen gegeben oder stabil. Da π mit Unsicherheit behaftet ist, wird das Problem mittels des Mean Variance Verfahrens gelöst. Es ergibt sich:

$$\max_{q,n}\left[E(\pi)-\frac{1}{2}\eta\cdot Var(\pi)\right]$$

bzw.: $$\max_{q,n}\left[E(p)\cdot q-c(q)+n\cdot[E(p)-f]-\frac{1}{2}\eta\cdot Var(\pi)\right]$$

Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial\bullet}{\partial q}=0\rightarrow E(p)-c'(q)-\eta\cdot(q+n)\cdot Var(p)$$
$$\frac{\partial\bullet}{\partial n}=0\rightarrow E(p)-f-\eta\cdot(q+n)\cdot Var(p)$$

Dies führt offensichtlich zu:

f = c'(q)

Diese Gleichung drückt die optimale Produktionsentscheidung aus. Die Grenzkosten der Produktion entsprechen dem Terminkurs.

Beachte: der Terminkurs enthält das relevante Preis- reps. Produktionssignal, nicht eine subjektive Preiserwartung E(p).

Um die optimale Anzahl Kontrakte zu erhalten, wird die partielle Ableitung nach n aufgelöst. Es ergibt sich:

$$n^*=-q+\frac{E(p)-f}{\eta\cdot Var(p)}$$

Diese Formel gliedert sich in zwei (unabhängige) Teile. Einerseits einen realen Teil, der sich auf die optimale Produktionsentscheidung bezieht, andererseits ein spekulativer Teil, in dem sich die Erwartungen des Individuums gegenüber dem Markt spiegeln.

Real: $n=-q$

Spekulativ: $n=\dfrac{E(p)-f}{\eta\cdot Var(p)}$

Die spekulative Komponente ist offensichtlich dann Null, wenn E(p) = f ist, wenn sich also die individuellen Erwartungen mit jenen des Marktes (also dem Terminkurs) decken. Wenn das Individuum positive Erwartungen hat, dann sollte es Futures kaufen bzw. weniger Futures verkaufen als durch die reale Produktionsentscheidung impliziert wird.

Aus den dargestellten Formeln lässt sich das Separationstheorem ableiten:

"Produktions- und Spekulationsentscheidung können (und müssen) separat getroffen werden."

4.2 Gleichgewicht im Commodity Futures Markt

Im Marktgleichgewicht müssen sich Angebot und Nachfrage nach Absicherung die Waage halten, also:

$$\sum_j n_j{}^* = 0 = \sum_j q_j + \sum_j \frac{E(p) - f}{\eta_j \cdot Var(p)}$$

Es sei: $\sum_j \frac{1}{\eta_j} = \frac{1}{\eta_M}$ und $\sum_j q_j = Q$

sodass: $0 = -Q + \frac{E(p) - f}{Var(p)} \cdot \frac{1}{\eta_M}$

aufgelöst: $E(p) - f = Q \cdot \frac{1}{\eta_M} \cdot Var(p)$

Die Erwartungen sind nicht mit einem Index versehen, weil nach gleichgewichtigen Markterwartungen gefragt ist.

Wenn eine positive Menge Q produziert wird (Q > 0), so ist die rechte Seite der Gleichung auf jeden Fall grösser 0 und somit E(p) > f. Man spricht dann von einem 'negative bias'. Um eine Market Clearing Situation zu erhalten, müssen Spekulanten das Restrisiko tragen, für das sie mit einer Risikoprämie entschädigt werden wollen. Die Risikoprämie ergibt sich aus der Differenz zwischen Terminpreis f und Markterwartung E(p).

Wenn E(p) > f, so entschädig die Risikoprämie die Spekulanten dafür, dass sie auf Termin kaufen. Es besteht eine sogenannte Short Hedging Pressure (die Produzenten wollen short gehen). Es besteht also ein Absicherungsüberhang der Produzenten.

Wenn umgekehrt E(p) < f impliziert dies, dass Q < 0, es besteht also ein Absicherungsüberhang auf Konsumentenseite. Man spricht von Long Hedging Pressure.

Im Fall von E(p) = f resultiert Q = 0, der Markt führt in sich zu einer Market Clearing Situation. Man spricht von Neutralisierung.

Im Commodities Markt können also negative Risikoprämien auftreten, was im Vergleich zum Beispiel zu Aktienmärkten ungewöhnlich ist. Dies ist aber nur einer der Unterschiede zwischen Aktien- und Commodityrisiken. Typischerweise sind Risikoprämien in den Commoditiy Märkten viel volatiler. Dadurch kann Liquidität zu einem wesentlichen Element bei Futures-Settlement werden. Das Kredit- bzw. Gegenparteirisiko kann unter Umständen die Hedgingstrategie beeinflussen. Und schliesslich ist das Know-How der besonderen Produkteigenschaften essentiell.

4.3 Cross Hedging

Bisher wurde unterstellt, dass 1 Gut produziert und über den Terminmarkt verkauft wird. Häufig besteht aber für das spezifische abzusichernde Gut kein oder nur ein schlechter Terminmarkt (Marktliquidität, Gegenparteirisiko etc.). Es muss also ein (gutes) Hedginginstrument gefunden werden, das dem abzusichernden Risiko hinreichend entspricht. Dabei resultiert aber ein möglicher Mismatch der Preisveränderungen von Hedge und Basis, ein Basis- bzw. Tradingrisiko.

Ein mögliches Modell, um das Basisrisiko abzubilden ist:

$$\tilde{\pi} = q \cdot \tilde{p} - C(q) + n \cdot \left[\tilde{f}_1 - f_0\right]$$

Es bedeuten: q: Produzierte Menge $\quad$ f_1: Terminpreis bei Fälligkeit

p: Preis bei Fälligkeit — f_0: Terminpreis heute
π: Gewinn — C(q): Produktionskosten

Es wird wie beim Modell ohne Basisrisiko wieder das Vermögen maximiert:

$$\max_{q,n} V = \left[E(\pi) - \frac{1}{2}\eta \cdot Var(\pi) \right]$$

wobei: $E(\pi) = q \cdot E(\tilde{p}) - C(q) + n \cdot \left[E\left(\tilde{f}_1\right) - f_0 \right]$

und: $Var(\pi) = q^2 \operatorname{var}(\tilde{p}) + n^2 \operatorname{var}\left(\tilde{f}_1\right) + 2qn \cdot \operatorname{cov}\left(\tilde{p}, \tilde{f}_1\right)$

Es gilt nach wie vor das Separationstheorem, sodass

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 0 \rightarrow q^* \text{ (Produktionssignal)}$$

und $$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \rightarrow n^* \text{ (Absicherung)}$$

Das impliziert, dass c'(q*) = f_0. Sprich: die individuellen Preiserwartungen sind irrelevant. Der Produktionsentscheid wird wie in einer sicheren Welt ohne Basisrisiko getroffen. Der Grund dafür ist, dass in f_0 alle relevante Information zum gegebenen Zeitpunkt aggregiert ist (effiziente Märkte im Zeitpunkt 0). Eine vollständige Elimination der Risiken ist trotzdem nicht möglich, es gibt nicht absicherbare Risiken (im wesentlichen Basis- und Trackingrisk). Beim Cross Hedging enthält die optimale Produktionsentscheidung also folgerichtig Risikoparameter und individuelle Erwartungen:

$$c'(q^*) + \underbrace{\eta \cdot \operatorname{var}(p)\left(1 - \rho_{pf}^2\right)}_{\text{Cross Hedging Cost}} = \underbrace{\left(1 - \beta_{pf}\right) \cdot E(p) + \beta_{pf}\left(f_0 - E(B)\right)}_{\text{Produktionssignal}}$$

mit: $$\beta_{pf} = \frac{\operatorname{cov}(p, f_1)}{\operatorname{var}(f_1)} = \frac{\rho_{pf} \cdot \sigma_p}{\sigma_f}$$

und: $B = f_1 - p$

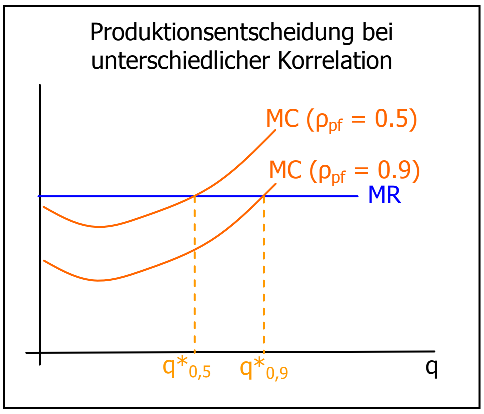
sodass: $E(B) = E(f_1 - p) = E(f_1) - f_0$

Wenn also $\beta \neq 1$, so spielen auch individuelle Preiserwartungen eine Rolle für die Produktionsentscheidung. Für $\beta = 0$, so sind sogar einzig die individuellen Preiserwartungen für die Produktionsentscheidung relevant. Je weniger sich Hedge und Produkt ähneln (d.h. je tiefer die Korrelation zwischen p und f), desto schlechter ist der Hedge und desto näher an $\beta = 0$. Je näher an $\beta = 0$, desto wichtiger werden aber die subjektiven Preiserwartungen. Dies ist unabhängig davon, ob abgesichert wird oder nicht (das Separationstheorem gilt!). Das relevante Produktionssignal ist ein gewichteter Durchschnitt von objektiven Markterwartungen und subjektiven Preiserwartungen.

Subjektiv: $(1 - \beta_{pf}) \cdot E(p)$
Markt: $(\beta_{pf}) \cdot f_0$

Neben den Grenzkosten der Produktion spielen für den Produktionsentscheid auch Cross Hedging Costs eine Rolle. Diese entstehen direkt aus dem Mismatch des abzusichernden Risikos mit dem Hedge, also weil das relevante Risiko am Kapitalmarkt nicht angeboten wird.

Die Cross Hedging Costs beinhalten die Risikoprämie für die Nicht-Absicherbarkeit des Preisrisikos p. Die CHK bilden eine Kostenkomponente der Produktion. Die Absicherbarkeit der Risiken (also die Korrelation ρ_{pf}) hat einen positiven Effekt auf die optimale Produktion, wie in der nebenstehenden Graphik dargestellt. Eine tiefe Korrelation erhöht die Grenzkosten MC und verschiebt die Grenzkostenkurve nach oben. Dadurch wandert der Schnittpunkt mit der Grenzertragskurve MR nach links, die optimale Produktionsmenge q* nimmt ab.



Dies impliziert, dass bei unvollständigem Hedge, wenn also Cross Hedging Costs existieren, die Absicherungsentscheidung immer im Kontext realwirtschaftlicher Entscheidungen zu sehen ist[3].

5. Kreidtrisiko

5.1 Grundbegriffe

Kreditrisiken weisen gewisse Besonderheiten auf, beginnend bei der nicht ganz klaren Definition:

- Wenn die Gegenpartei nicht zahlungsfähig oder –willig ist, so ist dies sicherlich ein Default. Aber wann tritt der Default genau ein? Ist Zahlungsunfähigkeit der einzige Auslöser eines Defaults?
- Kreditrisiken sind typischerweise nicht (vollständig) exogen, sie können beeinflusst werden (durch Auswahl der Schuldner, Wahl der Zahlungsmodalitäten etc.)
- Der Umfang von Kreditrisiken ist nicht immer klar definiert und kann sich im Zeitablauf ändern (Gegenparteirisiko)
- Zeitpunkt und Umfang des Schadens nach Eintritt eines Defaults sind oftmals unklar (insbesondere durch Recovery)
- Es gibt sachliche Unschärfen (wie sind Ratinänderungen zu bewerten?)
- Wie sind Diversifikationseffekte bei Krediten zu bewerten. Was heisst Diversifikation bei Krediten überhaupt?

Auch in methodischer Hinsicht gibt es Probleme bei der Modellierung dieser Risikokategorie:

- Die Datenlage ist angespannt, es existieren kaum systematisch aufbereitete Kreditdaten und Ausfälle bei Banken. Dies vor allem, weil Kreditausfälle ein unangenehmes Thema darstellen, mit dem man sich nicht gerne befasst. Ein Kreditausfall wird gern als zufälliges Einzelereignis angesehen, als Verlust verbucht und vergessen.
- Aus diesem Verhalten resultiert ein Selection Bias.
- Auch aus statistischer Sicht geben Kredite Probleme auf: Kreditverlust sind nicht einmal annähernd normalverteilt, Ereignisse mit kleiner Wahrscheinlichkeit haben grosse Auswirkungen. Die Wahl der passenden Modellverteilung ist unklar.
- Das theoretische Wissen ist klein, empirische Methoden (auf schwacher Datenbasis!) dominieren, vor allem Default Rates und Migrationsmatrizen.

[3] nach Anderson, R.W. & Danthine, J.-P. (1981). Cross hedging. *Journal of Political Economy*, *89*(6), 1182-1196.

Trotz dieser theoretischen Schwächen nimmt die Bedeutung der Kreditrisiken laufend zu. In der Vergangenheit wurden Kreditrisiken lange unterschätzt, insbesondere blieben Portfolioeffekte unbeachtet. Mit neuen Produkten (OTC-Derivaten) haben sich auch neue Risikoquellen im Kreditsegment ergeben (Grösse des Geschäfts, geringe Anzahl der Marktteilnehmer / Marketmaker, Systemrisiko).

Der verbreitetste Ansatz für den Umgang mit Kreditrisiken auf Interbanklevel war der Eigenmittelstandart BASEL I von 1988, der im Moment durch BASEL II abgelöst wird. BASEL II beinhaltet differenzierte Eigenmittelanforderungen und öffnet den Geldinstituten ihrer Grösse angepasste Risikosteuerungsinstrumente.

Das Kreditrisiko eines Objekts wird von sogenannten Rating-Agenturen beurteilt. Die wichtigsten sind Standards & Poors (S&P) und Moody's. Geratet werden unterschiedliche Dinge, so zum Beispiel Anleihen (bei Emission), kurz- und langfristige Schuldenkapazität einer Gesellschaft sowie die Gesellschaft als Ganzes. Grob eingeteilt werden die Schuldner in Investment Grade und Speculative Grade. Dies hat aber vor allem für institutionelle Anleger eine Bedeutung, da diese sich meist nur in Investment Grade gerateten Positionen engagieren dürfen. Dies erklärt die stark unterschiedlichen Risikoprämien der beiden Populationen, da der Investment Grade um vieles liquider ist dank der schwergewichtigen institutionellen Marktteilnehmern.

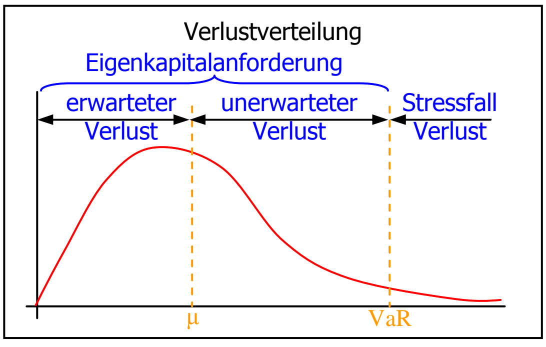
Default Rate:
Moody's definiert die Defaultrate als Anteil der im Zeitintervall ausgefallenen Issuers an allen Issuern, die im Zeitintervall hätten ausfallen können. Altman definiert die Default Rate als Dollarbetrag von defaulted Emissionen pro totalem Emissionsvolumen im Zeitintervall.

Beide Definitionen sind mit dem Problem der beschränkten Laufzeit der Bonds konfrontiert, zudem ändert laufend die Population, wodurch sich ein Survivor Bias ergibt.

Mortalität:
Welche Zahlungen einer im Zeitpunkt t=0 festgelegten Population fallen innerhalb eines (kurzen) Zeitintervalls (unterhalb der Bondlaufzeit) aus?

Gegenüber der Default Rate ist ein sachlicher Bezug gegeben, allerdings nur über kurze Zeithorizonte. Werden die Zeitintervalle hinreichend kurz gewählt, so gelangt man zu Marginal Mortality Rate MMR, die sich wiederum zur Cumulated Mortality Rate CMR aufsumiert.

Recovery Rate:
Bruchteil des defaulted Value, der nach Verwertung der Aktiven an die Anleger zurückgezahlt wird. In diesem Zusammenhang spricht man auch von der Loss Rate = (1 – Recovery Rate) und von der Mortality Loss Rate = MMR · (1 – Recovery Rate).



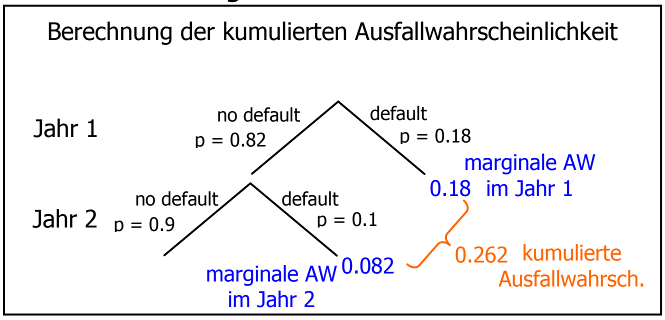
All diese Kennzahlen versuchen, das mögliche Verlustpotential einer Kreditposition zu modellieren. Das Verlustpotential setzt sich aus drei Komponenten zusammen: dem erwarteten Verlust, dem unerwarteten Verlust und Verlusten aus Stressfällen. Der erwartete Verlust wird aufgrund von Ratings bzw. historischen Default- oder Mortality-Raten bestimmt. Der unerwartete Verlust wird anhand VaR und ähnlichen Ansätzen bestimmt. Stressverluste liegen am Rand einer angenommenen Verlustverteilung.

5.2 Expected Loss und Default Probability

Der Expected Loss, also der erwartete Verlust, setzt sich aus drei Grössen zusammen:

- Ausfallwahrscheinlichkeit: wird bestimmt durch die Bonität der Gegenpartei
- Erwartete Verlustquote: mit welcher Recovery- / Loss-Rate ist zu rechnen?
- Erwartetes Exposure: welcher Betrag ist dem Risiko ausgesetzt?

Meist sind nur marginale Ausfallwahrscheinlichkeiten (die Default Wahrscheinlichkeit in einer bestimmten Periode) bekannt. Um aber zum Beispiel die Ausfallwahrscheinlichkeit eines über zwei Jahre laufenden Kredits zu bestimmen, müssen kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnet werden.



Die durchschnittliche Default-Wahrscheinlichkeit kann auch als Gegenereignis für gar keinen Ausfall berechnet werden, also:

$$\overline{P}_D = 1 - \left[\left(P_{nd}[t=1] \right) \left(P_{nd}[t=2] \right) \right]$$

im Bsp.: $$\overline{P}_D = 1 - \left[(0.82) \cdot (0.9) \right] = 1 - 0.738 = 0.262$$

Unterjährige Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnen sich analog eines geometrischen Durchschnitts, wenn die Default-Wahrscheinlichkeit konstant ist. Die monatliche Ausfallahrscheinlichkeit berechnet sich zum Beispiel:

$$d_m = 1 - \sqrt[12]{1 - d_y}$$

Das Verhalten der Ausfallwahrscheinlichkeit über die Zeit hängt ab vom Ausgangsrating. Für hohe Ratings (AAA bis BBB) nimmt die Ausfallfahrscheinlichkeit über die Zeit zu, weil es schwierig ist, eine so hohe Schuldnerqualität zu halten, während bei tiefen Ausgangsratings (CCC bis C) die Ausfallwahrscheinlichkeit über die Zeit abnimmt, weil "nur die Starken überleben". Kaum ein Unternehmen bewegt sich jahrelang am Rande des Bankrotts, sondern entweder es erholt sich oder geht endgültig in Konkurs. In der Konsequenz ist die errechnete monatliche Default Wahrscheinlichkeit zu hoch.

In diesem Zusammenhang spielen sogenannte Übergangswahrscheinlichkeiten eine Rolle: ausgehend von einem bestimmten Rating in t_0 wird die Wahrscheinlichkeit bestimmt, in t_1 in einem bestimmten Rating zu sein. Das Ganze kann als Matrix dargestellt werden:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{t+1} & & \\ & & A & B & C & D \\ & A & 0.97 & 0.03 & 0 & 0 \\ \text{t} & B & 0.02 & 0.93 & 0.02 & 0.03 \\ & C & 0.01 & 0.12 & 0.64 & 0.23 \\ & D & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Die Spalte D bezeichnet die Ausfallwahrscheinlichkeit. Die Matrix sieht immer gleich aus für alle Positionen (eine Position, die in t B ist, verhält sich gleich, egal ob sie in t-1 in A, B oder C klassiert war).

5.3 Exposure

Das Exposure bezeichnet die einem Verlustrisiko ausgesetzten Vermögenswerte. Bei Krediten entspricht dies dem nominal, bei Derivaten ist das Exposure abhängig vom (Zeit-)Wert der Position, also

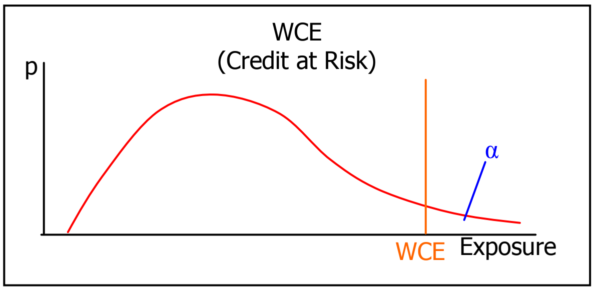
Current Exposure = max (V_t ; 0)
V_t: Marktwert der Derivates zum Zeitpunkt t, falls positiv
0: falls Marktwert negativ

Das Potential Exposure ist bezogen auf einen zukünftigen Zeitpunkt. Je nach Produkt ist das Potential Exposure variabel positiv (z.B. bei Swaps, Forwards, Long Optionen) oder 0 (bei Short Optionen). Der Erwartungswert des Potential Exposures entspricht dem erwarteten Wiederbeschaffungswert des Derivates, wenn das Current Exposure > 0 zu einem bestimmten Zeitpunkt T.

Expected Credit Exposure ECE:

$$ECE = \int_{-\infty}^{\infty} \max(x,0) \cdot f(x)dx$$

Analog zum VaR ist das Worst Credit Exposure WCE definiert. Es bestimmt das Exposure, das mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird.



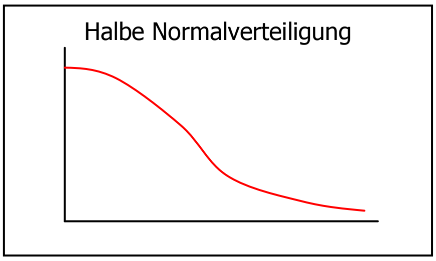
$$1-\alpha = \int_{WCE}^{\infty} f(x)dx$$

Für eine halbe Normalverteilung (Exposure ist nur für positive Werte x sinnvoll definiert) mit Mittelwert $\mu = 0$ und Varianz σ^2 berechnet sich das ECE als:

$$ECE = \frac{1}{2} \cdot E[x \mid x > 0]$$

$$ECE = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$ECE = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}$$



Der WCE dementsprechend:

$$WCE = 1.65 \cdot \sigma + \mu = 1.65\sigma \qquad \text{(weil } \mu = 0\text{)}$$

5.4 Zinsswaps

Die internationalen Finanzmärkte haben in den letzten Jahren eine grosse Zahl an innovativen Produkten entwickelt, mit denen sich Kredit- und Zinsrisiken fast beliebig den individuellen Bedürfnissen anpassen lassen. Das klassische Produkt ist der Zinsswap, bei dem variable Zinsen gegen fixe Zinszahlungen ausgetauscht werden, ohne dass ein Austausch des Nominals stattfindet. Der Payer verpflichtet sich, einen fixen Zins (z.B. 5%) zu zahlen, der Receiver leistet dafür Zahlungen von LIBOR + x bips (z.B. LIBOR + 200 bips).

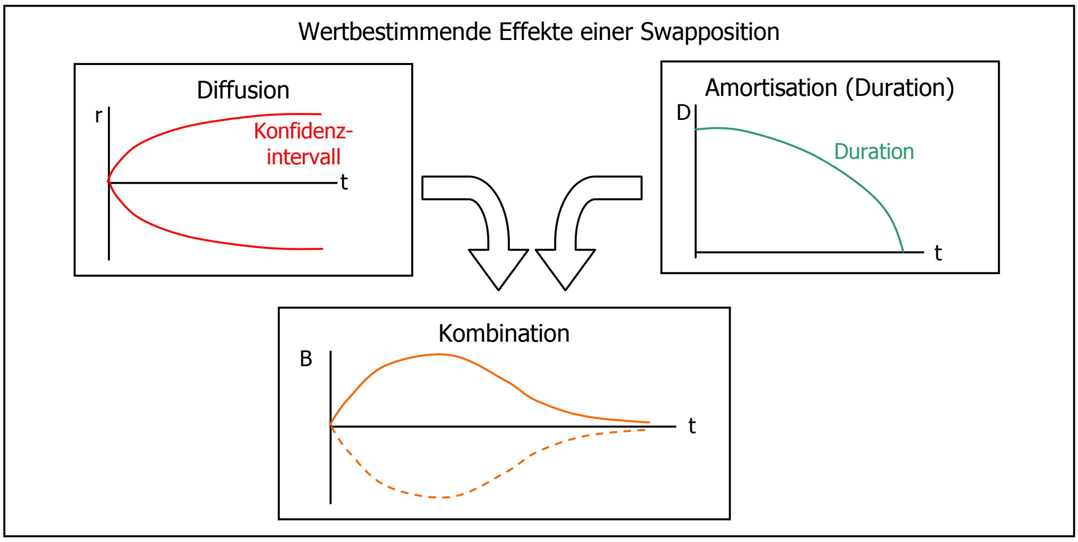
Das Vermögen des Receivers berechnet sich nach der Formel:

$$V_{t,rec} = B_{var}(F,\ t,\ T,\ c,\ r_t) - B_{fix}(F)$$

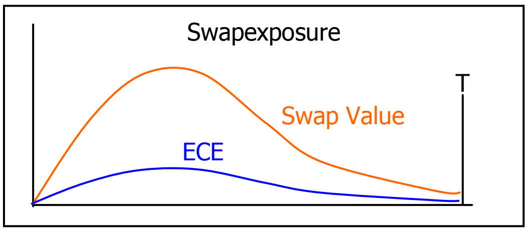
wobei: F: Face (Nominal) c: Coupon
t: heutiger Zeitpunkt r_t: Zins in der Periode t
T: Verfall

Der Swap bezieht sich auf die gesamte Laufzeit des Bonds, sodass der fixe Zins allein vom Face abhängt. Die Coupons sind so gewaehlt, dass am Schluss der Preis genau 100% beträgt.

In der Wertentwicklung von B_{fix} spielen zwei Effekte eine Rolle: der Diffusionseffekt (mehr Zinsunsicherheit auf längere Zeithorizonte) und der Amortisationseffekt (da laufend Zahlungen geleistet werden, sind immer weniger Zahlung noch ausstehend, wodurch das Exposure bzw. die Duration abnimmt). Es ergeben sich also zwei gegenläufige Effekte, wobei zu Beginn der Laufzeit des Swaps die Diffusion überwiegt, während kurz vor Maturity der Amortisationseffekt die Hauptrolle spielt.



Für die Bestimmung des Exposures, dem der Payer ausgesetzt ist, spielt nur die positive Seite des B-Raumes eine Rolle. Wenn die Gegenpartei im Verlauf der Lebensdauer des Swaps ausfällt, so entsteht durch die positive Differenz zwischen B_{fix} und B_{var} ein Verlust.



Das Expected Credit Exposure ist dann am grössten, wenn die (erwartete) Differenz zwischen B_{fix} und B_{var} am grössten ist und nimmt zur Ende der Laufzeit wieder ab, weil nur noch wenige Zahlungen ausstehend sind.

Unter der Annahme linear abnehmender Duration bezüglich der Restlaufzeit und proportionale Zinsvolatilität lässt sich das Maximum des Potential Credit Exposures bestimmen:

$$D_{\mathrm{mod}} = k(T-t)$$

$$\sigma_{(r_t - r_0)} = \sigma \cdot \sqrt{t}$$

Es folgt: $$\sigma(V) = k(T-t) \cdot \sigma\sqrt{t}$$

Das vollständige Differential nach t lautet:

$$\frac{d\sigma(V)}{dt} = k(-1)\cdot\sigma\sqrt{t} + k(T-t)\cdot\sigma\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sqrt{t} = (T-t)\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$t = \frac{T}{3}$$

Das Exposure ist also maximal nach Ablauf von 1/3 der Laufzeit.

Das WCE bezieht sich auf das maximale Exposure. Wird der Zinskurve eine Normalverteilung unterstellt, so ergibt sich für das $WCE_{95\%}$:

$$WCE = 1.65\cdot\sigma$$

$$WCE = 1.65\cdot k\left(T-\frac{T}{3}\right)\cdot\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}$$

$$WCE = 1.65\cdot k\left(\frac{2T}{3}\right)\cdot\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}$$

Für WCE gilt im Zeitablauf:

$$WCE_{95\%} = 1.65\cdot k\cdot\frac{2}{3}\cdot\sigma\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot T^{3/2}$$

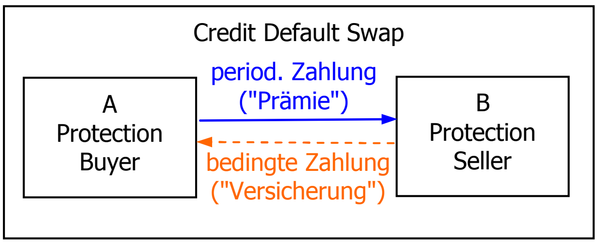
WCE wächst also mit $T^{3/2}$.

5.5 Kreditderivate

Neben dem Swap als klassisches Instrument, um Zinsrisiko zu verkaufen, gibt es mittlerweile eine vielzahl "echter" Kreditderivate, mit denen sich das Kreditrisiko an eine andere Partei abtreten lässt. Vor allem Banken, die eine hohe Sektor- oder Regionenkonzentration in ihrem Kreditportfeuille haben, nutzen solche Derivate zur Diversifikation.

Kreditderivate lassen sich Klassifizieren dem Underlying (1 Gegenpartei oder mehrere), der Ausübung (nur bei Default oder schon bei Downgrading) und nach dem Payoff (fix oder Variabel).

Die einfachste Form des Kreditderivats ist der Creidt Default Swap. Der Protection Buyer leistet eine periodische Zahlung an den Protection Seller und erhält dafür im Fall eines Credit Events eine bedingte Zahlung vom Protection Seller. Der Protection Seller zahlt die Differenz zwischen dem Exposure und der Recovery.

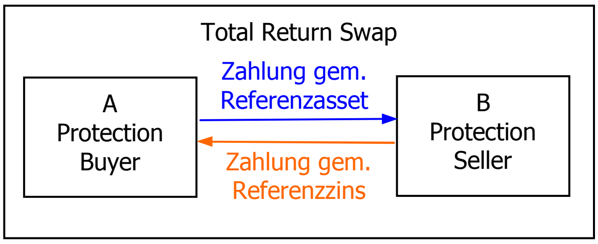


Bsp: A hält 100 Mio Bond, 10 Jahre Restlaufzeit der Firma XYZ. Er versichert das Kreditrisiko bei B und zahlt diesem dafür eine jährliche Prämie von 50 bips (=500'000.--). Ende Jahr fällt XYZ aus (Default), der Bond verliert 60% des Wertes. 40% der Position können im Recovery wiedergewonnen werden. B zahlt A nun die Differenz zwischen Recovery und Nominal, also 60 Mio.

Zahlungen im CDS können sein: Cash Settlement (Verlustquote, wie im Beispiel), Fixbeträge (z.B. erwartete Verlustquote) oder physische Lieferung des Underlyings gegen einen Fixbetrag (Nominal). Bezieht sich der CDS auf mehrere Bonds, sind z.B. die Varianten 'First to Default' (Wirkung des CDS tritt ein, sobald ein Bond defaultet) oder 'Threshold' (Wirkung bei Überschreitung einer bestimmten Verlustsumme) möglich.

Credit Default Swaps sind in vielen Produkten implizit enthalten, so kann ein risikobehafteter Bond aufgefasst werden als Bond ohne Kreditrisiko + Verkauf eines CDS.

Wichtig: Der CDS ist dem Kreditrisiko des Protection Sellers unterworfen. Es muss deshalb immer ein möglichst tiefe Korrelation zwischen Underlying und Protection Seller angestrebt werden.



Der Total Return Swap ist in seiner Wirkung mit dem klassischen Zinsswap vergleichbar. Der Protection Buyer liefert an den Protection Seller die Returns aus dem Underlying und erhält dafür eine Zahlung gemäss einem Referenzzins. Anders als beim Zinsswap, wo variable gegen fixe Zinsen getauscht werden, werden hier kreditrisikobehaftete Zahlungen gegen sichere Zahlungen getauscht.

Bsp.: A hält einen Bond 100 Mio mit Coupon 10%. A zahlt B den Coupon plus Marktveränderungen. B zahlt A LIBOR + 50 bips. Der Bond fällt (ohne zu defaulten!) von 100 auf 95, der LIBOR liegt bei 9%.
→ A zahlt Coupon (10% von 100'000'000) = 10 Mio an B
→ A "zahlt" Marktveränderung (- 5% von 100'000'000) = -5 Mio an B → A erhält 5 Mio
→ A erhält LIBOR + 50 bips = 9.5% = 9.5 Mio.
→ A erhält netto 4.5 Mio (= -10 + 5 + 9.5) von B

Damit hat A das gesamte ökonomische Risiko des Bonds an B abgetreten, ohne das Asset selbst zu handeln.

Beim Credit Spread Forward erhält der Protection Buyer die Differenz zwischen dem Credit Spread bei Verfall und einem (beliebig) fixierten Referenz Spread. Der Payoff des CSF ist also:

$$\text{Payoff} = (S_T - F) \cdot \text{Duration} \cdot \text{Nominal}$$

wobei: S_T: Spread bei Verfall F: fixierter Spread

Der Payoff des CFS kann sowohl positiv als auch negativ sein. Soll das Verlustpotential beschränkt werden, so steht eine Credit Spread Option zur Verfügung mit einem Payoff von:

$$\text{Payoff} = \max(S - K, 0) \cdot \text{Duration} \cdot \text{Nominal}$$

wobei: S: Spread K: Strike Spread

Bsp: A halt 100 Mio Bond, Laufzeit der Option 1 Jahr, Coupon 8%. Referenzzins ist Treasury (6.5%), der Credit Spread beträgt zum heutigen Zeitpunkt also 150 bips. A schliesst eine Credit Spread Option mit Strike Spread 160 bips (europäischer Stil) ab.
Bei Verfall notiert der Treasury auf 6%, der Preis des Bonds ist 101,26% bei einem ytm von 7.8%. Es resultiert ein Spread von 180 bips. Die Option zahlt die Differenz zum ytm eines Bonds mit Spread 160 bips (Strike).

Auszahlung der Option:

$$\frac{P_{Strike} - P_{Markt}}{100} \cdot Nominal = \frac{102.54 - 101.26}{100} \cdot 100'000'000 = 1'280'000$$

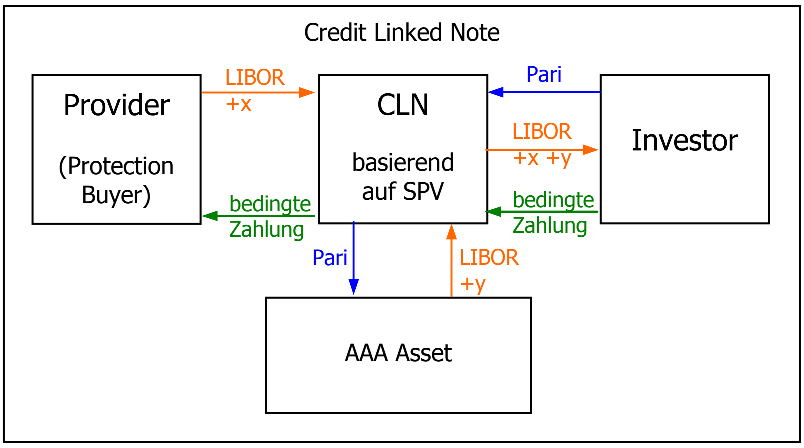
Alternativ kann der Payoff auch aufgrund der Duration berechnet werden:

Payoff = Spread · Duration · Nominal

im Bsp: Payoff = $(0.180 - 0.160) \cdot 6.3 \cdot 100'000'000$ = 1'260'000

Die Differenz entsteht durch die Approximation der Durationsberechnung.

Komplexer ist die Credit Linked Note CLN:

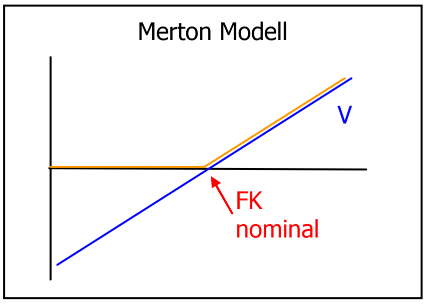


Für die Bewertung von Kreditderivaten bieten sich unterschiedliche Ansätze:

- Versicherungsmathematischer Ansatz
  - via historische Ausfallwahrscheinlichkeit
  - → Expected Loss
  - → Versicherungsprämie
  - beinhaltet *keine* Risikoprämie

- "empirischer" Ansatz aus beobachteten Preisen
  - z.B. von Credit Spreads oder Aktien
  - bedingt bereits bewertete Preise und effiziente Märkte
  - enthält Risikoprämien

Für die Bewertung aufgrund von Aktienpreisen bietet sich das Merton Modell an, wobei ein risikobehafteter Bond in einen risikolosen Bond und eine short CDS aufgeteilt wird. Es gilt dann:



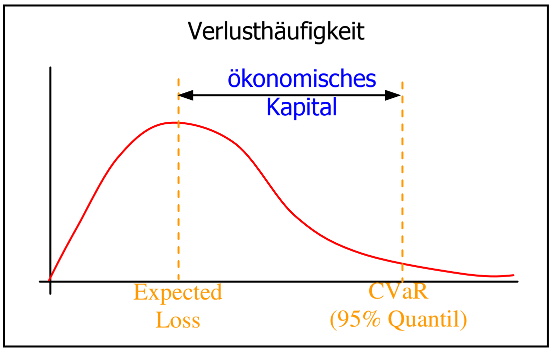
Merton: $V - S = K \cdot e^{-r\tau} - CDS$

wobei: V: Firmenwert; S: Eigenkapital; K: Nominal; r: risikoloser Zins; τ: Laufzeit

Da der Firmenwert meist nicht bekannt ist, wird dieser aus der Börsenkapitalisierung hergeleitet. Das Eigenkapital kann nach Merton aufgefasst werden als Option auf den Firmenwert mit Strike entsprechend dem nominalen Fremdkapital.

5.6 Portfoliomanagement

[4]Eine Bank (aber auch die Bankkunden) hat ein Portefeuille, das sich aus einer Vielzahl von Einzelpositionen zusammensetzt. Jede Einzelposition trägt ein bestimmtes Verlustpotential. Es ergibt sich für das gesamte Portfolio somit eine kumulierte erwartete Verlustverteilung für eine bestimmte Zeitperiode, z.B. 1 Jahr. Diese Verlust teilen sich in drei Sparten auf: den erwarteten Verlust, den unerwarteten Verlust und Stressverluste. Diese Sparten gehen unterschiedlich ins Pricing ein. Der Expected Loss wird voll eingepreist, während für die unerwarteten Verlust nur die Kosten der Kapitalbereitstellung (Kosten des ökonomischen Kapitals) ins Pricing einfliessen. Stressverluste schliesslich können für gewöhnlich nicht direkt an den Kunden überwälzt werden, sondern gehen über Umwege (Versicherungsprämie → Fixkostendeckung) an den Kunden.



Statistisch lässt sich eine solche Verteilung als Bernoulliverteilung (für eine Einzelposition) bzw. als Binomialverteilung (für n Einzelpositionen) modellieren. Allerdings müssen systematische Effekte berücksichtigt werden, insbesondere von Korrelationen der Einzelpositionen untereinander, um so Konzentrationen aufzeigen zu können (die ein überhöhtes Exposure verursachen).

Die Theorie bietet nur wenige geeignete Modelle, weshalb sich Best Practice Modelle durchgesetzt haben.. Diese Modelle lassen sich anhand dreier Kriterien systematisieren:

- Default-Mode vs. Mark-to-Market
  Default-Mode Modelle beruhen lediglich auf Ausfällen, während bei Mark-to-Market auch Ratingmigrationen eine Rolle spielen.
- Konditioniert vs. Unkonditioniert auf makroökonomische Rahmenbedingungen
- Strukturierte vs. Reduzierte Modelle
  Strukturierte Modelle besitzen ein ökonomische Modell der Ausfallursache (z.B. Merton), während reduzierte Modelle rein statistisch vorgehen.

Die bedeutendsten dieser Modelle sind Creditrisk+ von CSFB und Creditmetrics von JP Morgan. Creditmetric ist ein strukturiertes Mark-to-Market Modell, während Creditrisk+ ein reduziertes Default-Mode-Modell ist.

Der Vorteil des reduzierten Modells ist, dass es einen analytischen Ansatz wählt und deshalb leicht berechnet werden kann. Im Unterschied dazu muss bei strukturieten Modellen oft auf eine Monte Carlo Simulation zurückgegriffen werden, wenn es sich um ein komplexeres Portfolio handelt.

6. Operationelle Risiken – ein Abriss

Definition: "Das Risiko aus Verlusten folgend aus inadäquaten oder fehlgeschlagenen internen Systemen und Prozeduren, Menschen und externen Ereignissen."

Ein Versuch, operationelle Risiken (bzw. Gesamtrisiken) zu bewerten, bildet der Eigenkapitalstandrad BASEL II. Dieser Standard enthält je nach Grösse/Exposure unterschiedliche Ansätze zur Berechnung des Kapitalbedards zur Deckung von operationellen Risiken.

- Basisindikatoransatz
  - Kapitalbedarf = Bruttogewinn $\cdot\,\alpha$
- Standardansatz
  - Kapitalbedarf = $\Sigma(\alpha \cdot$ Indikator)
- Advanced Measurement Approaches
  - Internal Measurement Approach
  - Loss Distribution Approach
  - Scorecard Approach (einziger Ansatz, der die Systemqualität berücksichtigt)
- Key Risk Monitoring
  - Suche nach Key Risk Indikatoren z.B. im Settlement
  - Verwendung von Bayes'schen Netzwerken
  - Risikoquantifizierung mittels versicherungsmathematischer Methoden

Verluste aus operationellen Risiken gehören in die dritte Verlustkategorie der Stress Losses und müssen durch Versicherungen aufgefangen werden.

Bei der Verhinderung von operationellen Risiken muss stets das Erfordernis der Wirtschaftlichkeit beachtet werden. Das wirtschaftlich optimale (effiziente) Mass an Vorsicht ist dort gegeben, wo die marginalen Kosten der Sicherheit den marginalen Schaden decken.

7. Kapitalallokation und Performancemessung

7.1 Perfomancemessung (ex post)

Für eine Bank stellt sich die Frage nach der Performancemessung. Dabei ist nicht allein relevant, wie gross ex post die Rendite war, sondern wie hoch war das Risiko, dem diese Rendite zu verdanken ist. Weil aber die klassischen Masse der Renditemessung (ROE, ROI etc.) dem Risiko keine Rechnung tragen, wurde die risikoadjustierte Rendite RAROC (risk-adjusted return on (risk-adjusted) capital) definiert.

Bsp: ein FX- und ein FI-Händler haben in einem Jahr einen Gewinn von jeweils 10 Mio erwirtschaftet. Wer hat die bessere Performance erzielt?

Wie angedeutet ist das gefahrene Risiko relevant. Verglichen werden z.B. die VaR, um daraus ein risiko-adjustiertes Performancemass zu gewinnen:

	Gewinn	Nominal	Vola	VaR	**RAPM**
FX	10 M	100 M	0.12	28 M	36%
FI	10 M	200 M	0.04	19 M	54%

wobei: VaR = Nominal · Vola · kritischer Wert der NV(99%)
(bspw FX) VaR = 100 M · 0.12 · 2.31 = 27.72 ≈ 28
und: RAPM = Gewinn / VaR
(bspw FX) RAPM = 10 M / 28 M = 0.357 ≈ 36%

Das Risikokapital RC (hier der VaR) sollte sämtliche Risiken beinhalten, also Mark-, Kredit- und operationelle Risiken, Liquiditätsrisiken und Risikointerdependenzen. Weiter muss die Kapitalallokation das gesamte Bankportfolio berücksichtigen. Stand-alone Betrachtungen wie im Beispiel (wo keine Korrelation zwischen den Händlern besteht) können den Entscheid verfälschen. Richtigerweise muss also der marginale Beitrag zum Gesamtrisiko berechnet werden.

Die RAROC-Methodik gliedert sich in drei Schirtte:

1.) Risikomessung: Bestimmung von Exposure, Vola und Korrelation
2.) Kapitalallokation: Wahl des Konfidenzniveaus und des Zeithorizonts für VaR, ev. Zuschlag für regulatorisches Kapital
3.) Performancemessung: Adjustierung der Rendite um das RC

Im Zentrum des RAROC-Ansatzes steht neben dem RAROC selbst der EVA (Economic Value Added), die Wertschöpfung innerhalb einer Periode über die notwendige Rendite hinaus:

EVA = Gewinn – (Kapital · k)

mit: k: Kapitalkostensatz bzw. risikoadjustierte Verzinsung

sodann: $$RAROC = \frac{Gewinn - (Kapital \cdot k)}{Kapital} = \frac{EVA}{Kapital}$$

Ziel ist es, dass der RAROC grösser (oder gleich) 0 ist. Der RAROC ist konsistent mit dem Net Present Value Ansatz (NPV) einer 1-Perioden Investition mit vollständig investiertem Kapital:

$$NPV = \frac{Gewinn + Kapital}{1+k} - Kapital$$

$$NPV = \frac{Gewinn + Kapital}{1+k} - \frac{Kapital \cdot (1+k)}{1+k}$$

$$NPV = \frac{Gewinn - (Kapital \cdot k)}{1+k} = \frac{EVA}{1+k}$$

Der NPV einer 1-Perioden Investition entspricht also dem Barwert des EVA dieser Periode. Die Entscheidungsregel lautet NPV > 0 und ist somit konsistent mit der RAROC-Entscheidungsregel.

Für mehrperiodige Betrachtungen ist die Anwendung des RAROC unter Umständen problematisch, weil die Risikodiskontierung nicht abschliessend definiert ist. Risikopricing umfasst allerdings typischerweise eine wiederholte 1-Perioden Betrachtung, weil das Risiko (z.B. Zinszahlungen) jede Periode erneut anfällt bzw. sich von Periode zu Periode verändert.

Zur Illustration der EVA-/RAROC-Methodik wird das Beispiel der beiden Trader fortgeführt:

Bsp: Bisher erhielten die Trader 20% des von ihnen erwirtschafteten Gewinns, also 2M für jeden. Es soll ein neues Bonussystem eingeführt werden, das auf dem EVA beruht. Angenommen wird ein risikoadjustierter Kapitalkostensatz von k=15%. Das Risikomanagement der Bank definiert den Benchmark für das Zielrisiko (entspricht dem Risikokapital) bei 20M, der EVA bei genauer Einhaltung des Benchmarks lautet also:

EVA_{BM} = 10M – 15% · 20M = 7M

wobei: 10M: tatsächlicher Gewinn
20M: Zielrisiko

Im Mittel sollen sich die Bonusauszahlungen an die Trader nicht ändern. Bei genauer Einhaltung des Benchmarks wäre also wiederum 2M fällig geworden. Der EVA_{BM} wird dementsprechend kalibriert, um den Bonusanteil zu erhalten:

$$2M = 7M \cdot x \rightarrow x = 2/7 = 28.57\% \approx 29\%$$

Im neuen Bonussystem werden also 29% des EVA als Bonus an die Trader ausbezahlt. Nochmal die Tabelle von Seite 33:

	Gewinn	Nominal	Vola	VaR	**RAPM**
FX	10 M	100 M	0.12	28 M	36%
FI	10 M	200 M	0.04	19 M	54%

Unter dem neuen Bonus-Regime ergibt sich für die beiden Trader:

FX: $EVA = 10M - 15\% \cdot 28M = 5.8M$
$Bonus = EVA \cdot 29\% = 1.682M$
FI: $EVA = 10\,M - 15\% \cdot 19M = 7.15M$
$Bonus = EVA \cdot 29\% = 2.0735M$

7.2 Pricing (ex ante)

Der EVA Ansatz eignet sich nicht nur für ex post Performance Betrachtungen, sondern auch für das ex ante Pricing eines Produkts. Dafür muss die risikoadjustierte Rendite eines Produktes analysiert werden. Für einen Zinsswap umfasst dies beispielsweise:

- Bruttoerlös: Barwert des bid/ask Spreads abzüglich Gebühren
- Kosten: Hedgingcosts, erwartete operationelle Kosten, Betriebskosten (direkt/indirekt), Steuern, erwartete Kreditkosten (= exp. Loss)

Der EVA berechnet sich als:

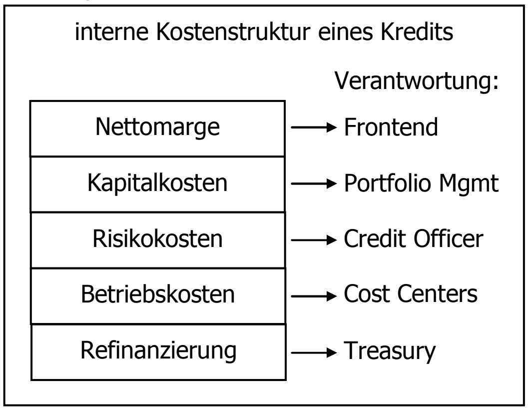
$$EVA = Erlös - Kosten - (k \cdot RC)$$

Da die Entscheidungsregel EVA > 0 lautet, wird der Swap gepreist, sodass:

$$Erlös > Kosten + (k \cdot RC)$$

bzw.: $Mindesterlös = Kosten + (k \cdot RC)$

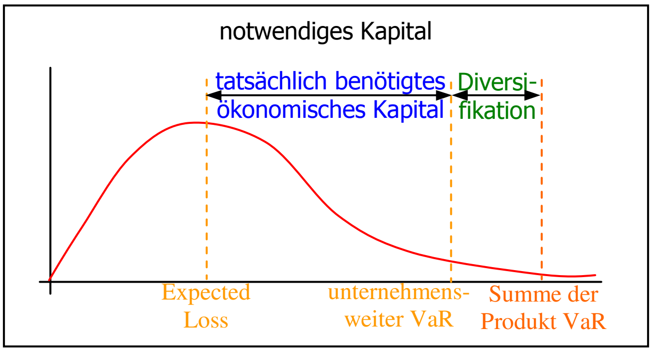
In den Pricing Prozess eines Produktes fliessen also wie gesehen mehrere Einzelpositionen ein, die vor allem in grösseren Unternehmen unterschiedlichen Verantwortungen unterstehen. Mittels sogenannter Transferpreise zur internen Verrechnung kann der Teilkostenbeitrag der einzelnen Stellen 1:1 ins Pricing übernommen werden. Exemplarisch sei hier die interne Kostenstruktur eines Kredits dargestellt. Dabei entsprechen die Risikokosten dem erwarteten Verlust des Kredits. Zusammen mit den Kapitalkosten resultiert aus ihnen das Kreditrisiko für die Bank. Aus der Summe der Teilkosten exklusive Nettomarge ergibt sich für EVA = 0 der minimale Preis (kein Gewinn!). Dies entspricht dem Transferpreis.



Aufgrund von Skaleneffekten haben sich in den letzten Jahren einige grosse Geldinstitute entschlossen, sogenannte B4B-Produkte (Bank for Banks) anzubieten, insbesondere im CAT-

Geschäft (Credit Asset Transfer). So wickelt z.B. die UBS für Postfinance das Kreditgeschäft bis und mit Portfolio Management ab, der Postfinance selbst bleiben nur die Frontend-Aufgaben. Die Verrechnung erfolgt im wesentlichen zu Transferpreisen.

7.3 Kapitalallokation



Für eine Bank stellt sich die Frage, wie viel Kapital zur Risikodeckung bereitgestellt werden muss. Dies ist relevant, um die notwendigen Kapitalkosten des Risikokapitals im Pricing bestimmen zu können.

Weil die einzelnen VaR keine Korrelationen / Diversifikationseffekte zwischen den Produkten beachten, *überschätzt* die Summe der Produkt-VaR das Risiko und veranschlagt somit ein zu hohes benötigtes ökonomisches Kapital. Daraus folgen Verzerrungen im Pricing. Besser ist deshalb die Berechnung marginaler VaR. Der Risikobeitrag eines Produktes bestimmt sich als:

ΔRisiko = Unternehmens VaR mit Produkt – Unternehmens VaR ohne Produkt

Dies entspricht dem marginalen Risikokapital des Produktes. Weil aber auch in diesem Konzept mögliche Konzentrationen und Korrelationen der Teilpositionen nicht berücksichtigt werden, *unterschätzt* dieser Ansatz das Risiko, es gilt:

Σ marg RC < Unternehmens-RC

Zur Lösung des Kapitalallokationsproblemes bieten sich fünf Ansätze an:

1.) Kapitalallokation nach Produkts-VaR
Diese Variante beachtet keine Korrelationen, es wird zuviel Kapital alloziert → zu hohe Kapitalkosten.
2.) Kapitalallokation nach skaliertem Produkt-VaR
Der VaR wird so skaliert, dass genau das RC alloziert wird. Dabei werden aber keine Korrelationen beachtet.
3.) Kapitalallokation nach marginalem VaR
Das Risiko wird unterschätzt, es wird zu wenig Kapital alloziert.
4.) Kapitalallokation nach skaliertem marginalem VaR
Diese Variante funktioniert analog Variante 2, ist aber sehr schwierig zu berechnen (es muss der marginale VaR für jedes Einzelprodukt ausgerechnet und dann noch auf das a priori nicht bestimmte notwendige RC skaliert werden)
5.) Kapitalallokation nach internem β
Die genaueste Methode der Kapitalallokation, weil sie den Risikobeitrag der Einzelprodukte ebenso wie die internen Korrelationen berücksichtigt und somit das Kapital optimal alloziert. Es ist jedoch sehr schwierig zu berechnen.

$$\beta = \frac{\operatorname{cov}(Rendite_{Prod}; Rendite_{Bank})}{\operatorname{var}(Rendite_{Bank})}$$

7.4 Theorie

Offensichtlich sind mit dem RAROC-Konzept also praktische Probleme verbunden. Die Frage wurde aber noch nicht beantwortet, ob der RAROC überhaupt den Firmenwert maximiert. Aus der Portfoliotheorie (CAPM) ist bekannt, dass systematische Risiken berwertet werden, während unsystematische Risiken nicht bewertet sind. Was aber ist mit illiquiden Assets? Hier gilt das Argument der Diversifikation nicht.

Das Problem lässt sich in einem 3-Perioden Modell modellieren (z.B. durch Fruit/Stein). Es zeigt sich, dass sich der Unternehmenswert der Bank maximiert, wenn ein vollständiger Hedge aller handelbaren Risiken verfolgt wird (voraussetzung, die Hedging-Märkte sind effizient).

Für die minimale Rendite einer Position lässt sich zeigen, dass:

$$\mu_n^* = \gamma \cdot \mathrm{cov}(\varepsilon_n^T, M) + G \cdot \mathrm{cov}(\varepsilon_n^N, \varepsilon_p^N)$$

wobei: μ_n^*: Minimalrendite
ε_n^T: Residuen des handelbaren Risikos der Position
ε_n^N: Residuen des nicht handelbaren Risikos der Position
ε_p^N: Residuen des nicht handelbaren Risiken der Bank
G: Mass für die Krümmung der Wertfunktion → "Risikoaversion" der Bank

Es bedeutet:
$\mathrm{cov}(\varepsilon_n^T, M)$: Marktrisikoprämie
$\mathrm{cov}(\varepsilon_n^N, \varepsilon_p^N)$: Prämie für nicht handelbare Risiken; höher bei schlechten Diversifikationseigenschaften.

Die Formel gilt nur für kleine Positionen, weil grosse Positionen das G beeinflussen können.

Wenn mehrere Investitionsentscheidungen offen stehen, so hängt die optimale Investition im Produkt i ab von der Investition im Produkt j, weil Diversifikationseffekte betsehen und ein bankweiter Kapitalkosteneffekt aus einer grossen Position resultieren kann (G ändert sich). Deshalb sind Entscheidungen über (grosse) Investitionen nur zentral zu treffen.

Der RAROC ist identisch mit dem Fruit/Stein Modell, wenn:
- kein bewertetes Risiko mehr vorhanden ist → alles schon gehedget
- das RC eine lineare Funktion der Kovarianz zwischen Investition und Restportfolio der Bank bildet, sodass RC = $\xi \cdot \mathrm{cov}(\varepsilon_n^N, \varepsilon_p^N)$
- $\xi \cdot \mathrm{cov}(\varepsilon_n^N, \varepsilon_p^N)$ entspricht der "Risikoaversion" G

Für die Implementation des RAROC folgt somit:
- das Marktrisiko (Marktfaktoren und systematische Risiken) muss bereits eliminiert sein, sodass nur noch nicht handelbare Risiken vorhanden sind
- das RC wurde bestimmt anhand des internen β (bzw. Second Best: Variante 4 nach skaliertem marginalem VaR)
- der Kapitalkostensatz wird *nicht* aus der Rendite der Bankaktien (also *nicht* aus dem CAPM), sondern aus dem Preis für zusätzliches Kapital bestimmt